

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

SÉRGIO ANTÔNIO COSTA DE SOUSA

**O USO DA MATEMÁTICA BÁSICA EM EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS RELACIONADAS AO CIRCUITO
INDUTIVO, CAPACITIVO E RESISTIVO (RLC)**

PALMAS - TO

2023

SÉRGIO ANTÔNIO COSTA DE SOUSA

**O USO DA MATEMÁTICA BÁSICA EM EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS RELACIONADAS AO CIRCUITO
INDUTIVO, CAPACITIVO E RESISTIVO (RLC)**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal do Tocan-
tins – Campus Palmas, como exigência à ob-
tenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Edson Luiz Kraemer

PALMAS - TO

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

S725u Sousa, Sérgio Antônio Costa de
 O uso da Matemática Básica em Equações Diferenciais Ordinárias
 relacionadas ao Circuito Indutivo, Capacitivo e Resistivo (RLC) / Sérgio
 Antônio Costa de Sousa. – Palmas, TO, 2023.
 55 p. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus
Palmas, Palmas, TO, 2023.

Orientador: Me. Edson Luiz Kraemer

1. Aplicações da Matemática Básica. 2. Aplicações de EDO. 3. Circuito
RLC. I. Kraemer, Edson Luiz. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e
pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a)
autor(a).



Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
CAMPUS PALMAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**FOLHA DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO
DE CURSO DE GRADUAÇÃO**

1. **TÍTULO: O Uso de Matemática Básica em Equações Diferenciais Ordinárias Relacionadas ao Circuito Indutivo, Capacitivo e Reativo.**
2. **AUTOR: SÉRGIO ANTÔNIO COSTA DE SOUSA**
3. **ORIENTADOR: Prof. Me. Edson Luiz Kraemer**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Tocantins, *campus* Palmas,
como parte das exigências para a conclusão
do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 08/12/2023.

Prof. Me. Edson Luiz Kraemer
IFTO – Campus Palmas
Presidente/Orientador

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 1

Prof. Me. Magno Márcio de Azevedo
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 2



Documento assinado eletronicamente por **Edson Luiz Kraemer, Servidor**, em 08/12/2023, às 18:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wallysonn Alves de Souza, Servidor**, em 08/12/2023, às 18:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Magno Marcio de Azevedo, Servidor**, em 08/12/2023, às 18:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.iftto.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2193482** e o código CRC **0BF0F291**.

Quadra 310 Sul, Lo 5, s/n, esquina com a Avenida NS 10 - Plano Diretor Sul — CEP 77.021-090
Palmas/TO — (63) 3236-4000
portal.iftto.edu.br — reitoria@iftto.edu.br

Dedico este trabalho aos meus pais Polar e Edna, à minha esposa Talia e minha família.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus, pela dádiva da vida e pelas inúmeras bênçãos que fui agraciado, inclusive de forma muito inesperada.
- Ao meu professor e orientador, Me. Edson Luiz Kraemer, pelos ensinamentos e sabedoria compartilhada durante as disciplinas Álgebra dos Conjuntos e Funções, Estruturas Algébricas, Introdução à Análise Matemática e Análise na Reta Real. Também agradeço pelas contribuições ao TCC, desde a ideia do tema e de seu desenvolvimento, até as sugestões e orientações.
- À banca formada pelo professor Me. Magno Márcio de Azevedo e pelo professor Doutor Wallysonn Alves De Souza pelas contribuições, considerações e correções realizadas neste trabalho. Agradeço também pela dedicação e disponibilidade aos alunos do curso de Matemática do IFTO, Campus Palmas.
- Aos professores do IFTO do curso de Matemática, em especial, devido à maior proximidade e interação, além dos já mencionados anteriormente, ao professor Me. Flavio Antonio Noletto Fernandes, ao professor Me. Jamerson Montenegro Lima e à Doutoranda Antônia Lília Soares Pereira.
- Agradeço imensamente à minha esposa, Talia, que foi a pessoa que mais me apoiou e me ajudou durante todo o período do curso.
- Aos meus pais, que mesmo à distância, sempre acompanharam, torceram e incentivaram a continuidade e conclusão do curso.
- Para finalizar, agradeço aos colegas do curso e a todos que participaram de forma direta e indireta para a concretização desta conquista.

*“O livro da natureza foi escrito exclusivamente com figuras e símbolos matemáticos”
(Galileu Galilei).*

Resumo

“Onde uso isso?” É uma pergunta muito comum nas aulas de Matemática. Este questionamento é esperado devido a diversos motivos, tais como os déficits de aprendizagem em Matemática, que muitas das vezes levam os alunos a desenvolver uma antipatia em relação a disciplina; a extensa carga horária da Matemática na escola básica, em comparação com outras disciplinas, que necessita ser justificada; e a curiosidade sobre como a linguagem matemática abstrata que está sendo aprendida pode ser aplicada no dia a dia. Nesse contexto, por um lado, é fato que o ensino da Matemática é muito importante, especialmente porque a educação matemática contribui para o acesso de forma integral a nossa sociedade tecnológica. Por outro lado, na escola, apresentar essas aplicações torna-se desafiador, uma vez que, na maioria dos casos, elas ainda são inacessíveis. Como resultado, geralmente restam apenas aplicações triviais ou pseudoaplicações. Dessa forma, este trabalho tem o objetivo de contribuir para a motivação do estudo da Matemática Básica, através de um exemplo que mostra o uso e a importância da Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em uma aplicação tecnológica. A aplicação escolhida é o Circuito Indutivo, Capacitivo e Resistivo (RLC), composto por Resistores, Indutores e Capacitores, que constituem a base de diversas aplicações presentes no cotidiano, tais como desfibriladores, bisturis elétricos e alarmes antifurto. Esse circuito é modelado por Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) Lineares Homogêneas de 2ª Ordem, e neste trabalho é apresentado o uso da Matemática Básica, incluindo Números Complexos, Determinantes e Trigonometria em um contexto algébrico nessas equações, destacando a utilização desses conteúdos em fenômenos físicos com aplicações tecnológicas.

Palavras-chave: aplicações da matemática; aplicações de EDO; circuito RLC; matemática básica; ensino da matemática

Abstract

“Where do I use this?” It’s a very common question in Mathematics classes. This is an expected questioning due to various reasons, such as deficits in math learning that often lead students to develop an antipathy to the subject; the large Mathematics workload in basic school, in comparison with other subjects, which must be justified; and curiosity about how the abstract mathematical language being learned can be applied in the day-to-day. In this context, on the one hand, it is a fact that Mathematics is very important, mainly because mathematics education contributes to comprehensive access to our technological society, on the other hand, at school, it is difficult to present these applications because they are, for the most part, inaccessible, leaving, in general, only trivial or pseudo-applications. Thus, this work aims to contribute to the motivation studying Basic Mathematics, through an example that demonstrates the use and importance of mathematics from Elementary and High School in a technological application. The chosen application is the Inductive, Capacitive and Reactive (RLC) formed by Resistors, Inductors and Capacitors that are the basis of several applications present in everyday life, for example, defibrillators, electric scalpels and alarms anti theft. This circuit is modeled by Second-order Linear Homogeneous Ordinary Differential Equations (ODEs) and this work shows the use of Basic Mathematics in these equations, including Complex Numbers, Determinants and Trigonometry in an algebraic context, showing the use of these contents in physical phenomena with technological applications.

Keywords: mathematics applications; ODE applications; RLC circuit; basic math; teaching mathematics

Lista de ilustrações

Figura 1 – Comparativo entre a Distribuição Percentual dos Estudantes por Níveis da Escala de Proficiência no Saeb em Matemática no Ensino Médio Tradicional – Brasil – 2019 e 2021	14
Figura 2 – Capacitor funcionando como filtro	23
Figura 3 – Alarmes antifurto e antena antifurto	26
Figura 4 – Montagem do rádio com antena de quadro e todos seus componentes	26
Figura 5 – Rádio AM montado	26

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Importância da Matemática e seus déficits de aprendizagem	13
1.2	Aplicações matemáticas no ensino	14
1.3	Aplicações da Matemática do Ensino Fundamental e Médio e em geral	16
1.4	Problema de pesquisa	16
1.5	Justificativa	17
1.6	Objetivos	18
1.6.1	Objetivo Geral	18
1.6.2	Objetivos Específicos	18
2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	20
3	CIRCUITO INDUTIVO, CAPACITIVO E RESISTIVO (RLC) E SUAS APLICAÇÕES	21
3.1	Circuito Indutivo, Capacitivo E Resistivo (RLC)	21
3.2	Aplicações do Circuito Indutivo, Capacitivo E Resistivo (RLC)	22
3.2.1	Telecomunicações	22
3.2.2	Medicina	23
3.2.3	Alarme antifurto	24
3.2.4	Exploração sobre as aplicações de Circuito Indutivo, Capacitivo E Resistivo (RLC)	24
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	27
4.1	Equação Diferencial e a classificação quanto ao tipo	27
4.2	Equações Diferenciais Ordinárias	28
4.3	Classificação das Equações Diferenciais Ordinárias	28
4.3.1	Quanto a ordem	28
4.3.2	Quanto a linearidade	29
4.3.3	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Homogêneas	29
4.3.4	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes	30
4.4	Solução de Equações Diferenciais Ordinárias	30
4.5	Método da equação auxiliar	31
4.6	Solução de EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem	32

4.7	Equações Diferenciais Ordinárias e o Circuito Indutivo, Capacitivo E Resistivo (RLC)	35
5	DEDUÇÃO DAS SOLUÇÕES E RESULTADOS	38
5.1	Dedução das Soluções Gerais das Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem relacionadas ao Circuito RLC	38
5.1.1	Dedução do primeiro caso	39
5.1.2	Dedução do segundo caso	40
5.1.3	Dedução do terceiro caso	41
5.1.4	Exemplos simples do uso das Solução Gerais das Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem relacionadas ao Circuito RLC	43
5.2	Conteúdos da Matemática Básica utilizados na dedução	44
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

1.1 Importância da Matemática e seus déficits de aprendizagem

A Matemática é muito importante na nossa sociedade devido, em especial, ao impacto da presença das suas aplicações. Inclusive, ao analisar o desenvolvimento de uma civilização ao longo da história, é possível estimar o conhecimento matemático alcançado por ela. Então, para todos os povos, em todos os tempos, a Matemática foi protagonista.

Assim,

Por causa de suas aplicações, a Matemática tem a função de “formatar a sociedade”. A Matemática constitui uma parte integrada e única da sociedade. Ela não pode ser substituída por nenhuma outra ferramenta que sirva a funções similares. É impossível imaginar o desenvolvimento de uma sociedade do tipo que conhecemos sem que a tecnologia tenha um papel destacado, e com a Matemática tendo um papel dominante na formação da tecnologia. Dessa forma, a Matemática tem implicações importantes para o desenvolvimento e a organização da sociedade – embora essas implicações sejam difíceis de identificar (SKOVSMOSE, 2001, p. 35).

Portanto, na nossa própria sociedade atual a Matemática está muito presente. Por esse motivo é necessário a alfabetização matemática. “Por alfabetização matemática, podemos inicialmente entender uma habilidade de calcular e usar técnicas matemáticas e formais [...]” (SKOVSMOSE, 2001, p. 68). Mais que isso, segundo ainda Skovsmose (2001), essa alfabetização se estende ao conhecer matemático, tecnológico e reflexivo que resumidamente são as habilidades socioculturais e políticas necessárias para o uso e reflexão dos conhecimentos matemáticos ou de suas aplicações.

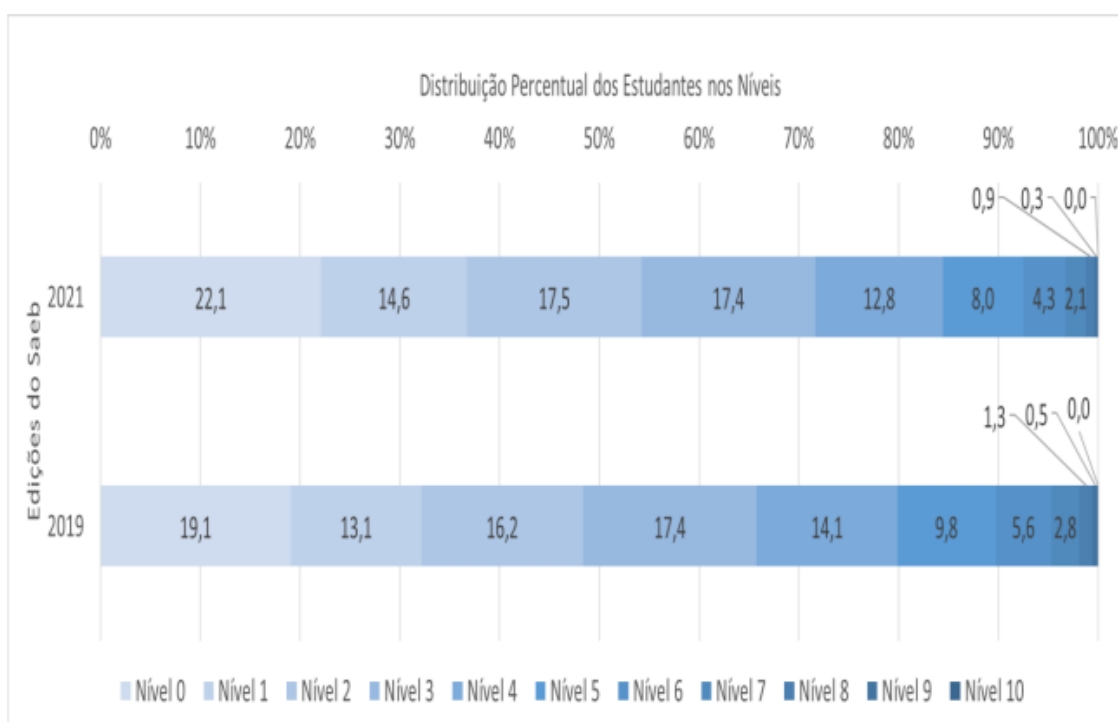
Desta maneira, de acordo com Skovsmose (2001), a educação matemática tem a importante função de contribuir com a construção das competências mínimas necessárias para acessar uma sociedade cada vez mais tecnológica. Assim, a alfabetização matemática é um pré-requisito necessário para uma democracia de fato, visto que sem ela os cidadãos não podem exercer sua cidadania de forma plena.

Por causa da importância da Matemática, segundo Frota (2017, p.2), o currículo da escola básica no Brasil tem privilegiado a Matemática em relação a outras disciplinas, como Geografia ou História, entretanto, mesmo considerando-se cerca de 12 anos de escolaridade, verifica-se que há grupos de alunos com dificuldades em estudar Matemática e de controlar seu próprio processo de aprendizagem.

Nesse sentido, os resultados do SAEB - Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - de 2021 (BRASIL. Inep, 2021), divulgados pelo governo federal,

mostram que o desempenho dos alunos do ensino médio em matemática é insatisfatório conforme mostra a Figura 1. Os níveis de proficiências variam de 0 a 10, sendo que mais de 70% dos alunos estavam classificados nos níveis de proficiência de 0 a 3, ou seja, com “aprendizagem insuficiente” (BRASIL. Inep, 2018). Além disso, 22,1% estavam no nível 0 de proficiência, o mais baixo, onde eles “[...] não demonstram habilidades muito elementares que deveriam apresentar nessa etapa escolar” (BRASIL. Inep, 2020).

Figura 1 – Comparativo entre a Distribuição Percentual dos Estudantes por Níveis da Escala de Proficiência no Saeb em Matemática no Ensino Médio Tradicional – Brasil – 2019 e 2021



Fonte: BRASIL. Inep (2021, p. 50)

1.2 Aplicações matemáticas no ensino

A Matemática transcende as fronteiras do conteúdo formal, como ressaltado por D'Ambrosio (2020). Sua natureza vai além das meras fórmulas, teoremas e equações. Ela constitui uma postura, um modo de pensamento que se entrelaça e se aplica de forma intrínseca no cotidiano, transformando-se em uma ferramenta essencial para a nossa sociedade.

Este paradigma é sustentado tanto por D'Ambrosio (2020) quanto Skovsmose (2001, p.34), os quais destacam a abrangência das aplicações matemáticas em múltiplos aspectos da vida diária. Por exemplo, na organização do nosso cotidiano, nas compras e no planejamento de atividades. Ela também está presente na razão áurea das Artes, na

estrutura de soneto em poesias, e na música, contribuindo para a construção de versos, rima e ritmo. Além disso, no planejamento industrial, na economia e em aplicações tecnológicas.

Dessa forma, observa-se uma profunda integração entre a Matemática e outras áreas de conhecimento. Nesse sentido, [D'Ambrosio \(2020\)](#) esclarece que no primeiro estágio da história e da nossa vida todas as formas de conhecimento são tão interligadas a ponto de serem indistinguíveis. Por isso, ao ensinar Matemática é natural que se leve em conta a relação com outras formas de conhecimentos e assim, a partir deles, desenvolver o processo contínuo de aprendizagem.

Além dessa relação, deve-se mostrar o uso prático da Matemática, pois

[...] a essência da matemática encontra-se em suas aplicações e, portanto, de um certo modo, fora da matemática. No processo de educação, é, então, extremamente importante ilustrar as várias maneiras de a matemática ser útil. Essa tendência pode ser entendida em sentido amplo, e muitos argumentos foram apresentados em apoio a uma Educação Matemática (EM) dirigida a aplicações ([SKOVSMOSE, 2001](#), p.12).

Diante do exposto, consciente da importância da Matemática e as suas dificuldades de aprendizagem, uma maneira de motivar e estimular o aprendizado é destacar o uso da Matemática e de suas aplicações para mostrar como um certo conteúdo pode ser aplicado fora da Matemática (ou em outro conteúdo matemático).

No entanto, a priori, principalmente quando se trata das aplicações tecnológicas presentes no dia a dia, as aplicações da Matemática Básica são geralmente limitadas. Pois, grande parte das utilizações da Matemática requer o uso de conhecimentos matemáticos avançados e especializados, em conjunto com outras áreas específicas.

Por isso,

[...] É frequentemente difícil, tanto na escola primária quanto na secundária, apresentar exemplos ilustrativos de aplicações reais; muito frequentes são exemplos que mostram pseudoaplicações. Aplicações reais da matemática ficam normalmente “escondidas”, embora sejam muitas e importantes ([SKOVSMOSE, 2001](#), p.34-35).

Apesar disso, na escola, mesmo se limitado à Matemática Básica, é possível apresentar aplicações elementares e adaptadas. De fato, existem inúmeras situações cotidianas em que se usa a Matemática, muitas das vezes sem perceber, e essas situações podem ser exploradas de maneira proveitosa no ensino. Nesse sentido, a próxima seção será dedicada à apresentação de aplicações matemáticas no contexto do Ensino Fundamental e Médio.

1.3 Aplicações da Matemática do Ensino Fundamental e Médio e em geral

Neste trabalho, nosso foco recai especialmente sobre as aplicações da Matemática Básica, as quais podem ocorrer de forma direta, como resultados imediatos desses conteúdos, ou de modo indireto, ou seja, quando a Matemática Elementar é empregada em contextos matemáticos mais avançados.

Em relação à Matemática do Ensino Médio, [Amâncio \(2019\)](#) fez um belo compilado de diversas aplicações elementares. Destaco, inicialmente, as interdisciplinares tais como: a criptografia na Segunda Guerra Mundial, a cartografia na Geografia, o conceito de função amplamente utilizado na Física, crescimento exponencial de seres vivos com reprodução assexuada na Biologia, os ângulos formados pelas estruturas moleculares da Química e o cálculo do Índice de Massa Corporal (IMC) na Educação Física.

Além disso, no mesmo trabalho, [Amâncio \(2019\)](#) reuniu aplicações da Matemática Básica nas profissões. Alguns exemplos são os cálculos trabalhistas e de tributos no Direito; a utilização da regra de três para a prescrição de medicamentos na Medicina; a Matemática Financeira nas atividades comerciais e empresariais. Assim, fica evidenciado o uso da Matemática em diversos contextos.

Outras aplicações nas atividades profissionais também foram exemplificadas, entretanto, muitas dessas envolvem também Matemática avançada e conhecimentos e tecnologias de outras áreas bem especializadas. Nesse sentido, um exemplo é dado por [Martins \(2012\)](#), explicando como a Matemática é utilizada pelo *Google*. Outros exemplos são as inúmeras aplicações do Circuito RLC que abordaremos neste trabalho.

Nesse contexto, sobre o uso da Matemática em geral, incluindo a matemática avançada, ela está presente em praticamente toda nossa tecnologia e em quase tudo que está no nosso dia a dia pois, como citado anteriormente, de acordo com [Skovsmose \(2001\)](#), nossa sociedade foi formatada através da Matemática.

Entretanto, é importante destacar que, assim como “[...] Não existe nenhuma decisão final que possa ser dada ‘pelos números’ ou ‘por fatos históricos’ ”([SKOVSMOSE, 2001](#), p.161), da mesma forma, as aplicações matemáticas são realizadas de forma integrada com outras áreas do conhecimento, e são o resultado dessa integração. Portanto, o mérito é compartilhado, sendo a Matemática apenas uma das ferramentas usadas.

1.4 Problema de pesquisa

Nas outras seções, discutiu-se, entre outras coisas, sobre a importância da Matemática e de sua presença na nossa sociedade. E que embora se tenha muitas aplicações matemáticas, muitas dessas aplicações tecnológicas que temos contato no cotidiano usam também matemática avançada. Dessa forma é difícil mostrar todo o poder de aplicação

matemática na escola básica.

Deste modo, principalmente para assuntos sem aplicações facilmente identificáveis de forma imediata, como por exemplo números complexos, tem-se muitos questionamentos sobre a utilidade do ensino daquele conteúdo. Essa indagação é mais recorrente muitas das vezes nesses conteúdos por conta da dificuldade. Assim, a aprendizagem desses tópicos é ainda mais prejudicada. Por isso, é essencial justificar a utilidade desses assuntos.

Nesse sentido, frequentemente, o estudo de alguns conteúdos da Matemática é justificado pelo potencial uso em aplicações ainda inacessíveis ao nível de conhecimento atual do aluno e/ou para uso acadêmico posterior na área de exatas. Assim, a Matemática Básica seria uma ferramenta a ser utilizada em outros conteúdos mais avançados e assim, possivelmente, de forma diferente e em outros contextos. Essa é a perspectiva deste trabalho, que visa verificar se realmente isso acontece, em particular para as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) lineares relacionadas a circuitos RLC.

Portanto, nosso problema é o seguinte: Quais os conteúdos do Ensino Fundamental e Médio são utilizados nas EDOs relacionadas a circuitos RLC? De que forma e contexto é esse uso?

1.5 Justificativa

“Onde uso isso?” É uma pergunta muito comum nas aulas de Matemática. Essa é uma indagação muito presente nos alunos, mesmo que nem sempre seja verbalizada pelos mesmos.

Tendo isso em vista, e a partir da observação da importância da Matemática Básica nas disciplinas de Matemática no ensino superior, este trabalho foi feito para mostrar como isso acontece de forma prática.

Assim, espera-se apresentar novos contextos de aplicações de conteúdos do Ensino Médio, os quais muita das vezes são difíceis de encontrar ou muito limitados. Além de mostrar novas formas de abordagens diferentes das apresentadas no Ensino Básico, um exemplo disso é o uso dos números complexos em Circuitos RLC que será feito neste trabalho.

Para isso, foi escolhido como conteúdo matemático avançado as Equações Diferenciais Ordinárias relacionadas ao Circuito RLC. Essas equações atendem ao requisito de demonstrar aplicações facilmente identificadas no dia a dia, como mostrado na Seção [3.2](#).

Destaco que este trabalho mostra a importância e o uso da Matemática Elementar em EDOs relacionadas a Circuitos RLC. Assim, se trata de um trabalho interdisciplinar para mostrar aplicações práticas conhecidas que a priori, aparentemente,

não tem relação com a Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Mas, será apresentado, aqui neste trabalho, o uso da Matemática Elementar nessas aplicações tão presentes no nosso dia a dia. Em relação as aplicações, o circuito RLC está presente em diversas aplicações no cotidiano, tais como, desfibriladores, bisturis elétricos, alarmes antifurto, além disso também está presente em equipamentos de telecomunicações, elétricos e eletrônicos.

Dessa forma, ao cumprir esses objetivos, espera-se que os estudantes compreendam a importância dos conceitos da Matemática vista na escola através da apresentação do uso dessa Matemática em EDOs relacionadas ao Circuitos RLC e tenham maior motivação para estudá-los.

Inclusive, para os alunos com afinidade com a Matemática, ao serem apresentados às suas aplicações em outras áreas, servirá como motivação para aprofundar seus estudos em campos como eletrônica, engenharia e física. Por outro lado, aos estudantes interessados em áreas relacionadas à Matemática, essa abordagem fortalecerá a motivação para o estudo da Matemática Básica, que estará presente em suas futuras carreiras.

Portanto, seja para um aluno com maior interesse pela matemática ou por áreas afins, ou até mesmo para um estudante curioso para saber, por exemplo, sobre o funcionamento de um antifurto de uma loja, este trabalho mostra a importância dos conceitos básicos de Matemática, que são fundamentais para o estudo de Circuitos RLC e outras áreas da ciência e tecnologia.

1.6 Objetivos

1.6.1 Objetivo Geral

Motivar o estudo de conteúdos de Matemática do ensino Fundamental e Ensino Médio, demonstrando a importância da Matemática Básica na resolução de problemas modelados por Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) relacionadas a Circuitos RLC, através da apresentação de seu uso nesse contexto específico.

1.6.2 Objetivos Específicos

Objetivos Específicos 1: Deduzir de forma detalhada as soluções gerais das EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem (relacionadas ao Circuito RLC), utilizando o método da equação auxiliar.

Objetivo Específico 2: Identificar e descrever os conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio utilizados no processo do Objetivo Específico 1.

Objetivo Específico 3: Identificar e descrever as principais competências e as habilidades estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) dos conteúdos

do Objetivo Específico 2, especificando o ano escolar do Ensino Fundamental ou Médio associado a cada competência ou habilidade.

Objetivo Específico 4: Analisar de que forma foram utilizados os conteúdos identificados, no segundo Objetivo Específico, na dedução das soluções gerais realizada no Objetivo Específico 1.

2 Procedimentos Metodológicos

O foco deste trabalho foi investigar o uso dos conhecimentos de Matemática Básica na resolução de problemas modelados por Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) relacionadas a Circuitos RLC, com o objetivo de motivar o estudo dos conteúdos da Matemática do Ensino Fundamental e Médio pela apresentação do seu uso prático e relevante em um contexto concreto.

As EDOs utilizadas na pesquisa foram as EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem, relacionadas ao Circuito RLC. Nesta seção, será feita a referência a esse tipo específico de EDOs como “EDOs de segunda ordem” ou simplesmente “EDOs”.

De forma geral, os procedimentos metodológicos da pesquisa foram exploratórios no Objetivo Específico 1, que consistiu na dedução das soluções gerais. Para os outros objetivos, os procedimentos foram mistos, sendo predominantemente descritivos para o segundo e terceiro objetivo e qualitativos para o quarto objetivo. Será detalhado a seguir como a pesquisa foi realizada.

Primeiro foi realizado um procedimento técnico teórico, no qual as soluções gerais das EDOs foram deduzidas utilizando o método da equação auxiliar de forma explorativa, possibilitando a realização dos Objetivos Específicos 2 e 3.

Em seguida, foram realizadas a identificação e a descrição dos conceitos, fórmulas e conteúdos de Matemática Básica utilizados na dedução, seja por meio de abordagem empírica, análise documental da BNCC ou pesquisa bibliográfica.

Além disso, a identificação das competências e habilidades utilizadas na dedução das soluções das EDOs de segunda ordem foi realizada por meio de análise documental da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), onde foram especificados os anos escolares associados a cada competência e habilidade identificadas.

Em relação à identificação dos conteúdos, foram utilizados retângulos azuis ou destaque em negrito para identificar e destacar algumas das fórmulas, conceitos e conteúdos da Matemática Básica diretamente no texto, à medida que apareciam durante a dedução das soluções das EDOs.

A partir do que foi feito anteriormente, realizou-se a discussão e apresentação dos resultados. Nesta etapa, por meio de pesquisa bibliográfica, os conhecimentos da Matemática do Ensino Fundamental e Médio identificados anteriormente foram descritos e discutidos em relação à sua importância, à forma que foram utilizados na pesquisa e à maneira que como esses conteúdos são abordados na escola.

3 CIRCUITO INDUTIVO, CAPACITIVO E RESISTIVO (RLC) E SUAS APLICAÇÕES

No início deste Capítulo serão abordadas as características do Circuito RLC. Na sequência, serão apresentadas algumas aplicações dos Circuitos RLC, destacando sua presença no dia a dia em diversos ambientes e contextos, tais como as telecomunicações, medicina e alarme de uma loja de roupas. Dessa forma, espera-se despertar a curiosidade dos leitores sobre esse tema e motivar o estudo sobre toda a Matemática e Física envolvida.

3.1 Circuito Indutivo, Capacitivo E Resistivo (RLC)

O Circuito RLC é um circuito elétrico, uma ligação de dispositivos, com três componentes: o Resistor, o Indutor e o Capacitor. Cada um desses elementos possui características individuais distintas e, quando combinados, formam um sistema com propriedades específicas.

Nesta seção serão apresentadas as características de cada componente do Circuito RLC. Iniciando com o Resistor, que é um componente eletrônico que tem como principal utilidade controlar o fluxo de corrente elétrica em um circuito. Ele é projetado para ter uma resistência elétrica específica, que é medida em ohms (Ω).

Ele funciona limitando a quantidade de corrente elétrica que flui em um circuito. De acordo com [Nilsson e Riedel \(2015, p. 31\)](#), o Resistor, ao ser inserido em um componente ou circuito, reduz a corrente que passa por ele, controlando o fluxo de elétrons. Isso é importante para diminuir a corrente até valores adequados aos dispositivos eletrônicos.

Esse processo de diminuição da corrente elétrica no circuito feita pela resistência do Resistor ocorre da seguinte forma:

No decurso dessas interações, uma parte da energia elétrica é convertida em energia térmica e dissipada sob a forma de calor. Esse efeito pode ser indesejável. Contudo, muitos dispositivos elétricos úteis aproveitam o aquecimento de resistências, como fogões, torradeiras, ferros de passar e aquecedores de ambientes ([NILSSON; RIEDEL, 2015, p. 31](#)).

Assim, o Resistor pode ser utilizado de diversas maneiras. Para finalizar, é importante saber sobre o comportamento desses componentes ao serem ligados em série e paralelo. Em paralelo, os Resistores, dividem a corrente mantendo a tensão. Por outro lado, em série eles dividem a tensão e a corrente se mantém constante (em um novo valor menor). Dessa forma, em conjunto com outros componente eles podem ser usados de várias maneiras. Exemplos nesse sentido serão dados na Seção 3.2 que trata sobre as aplicações do Circuito RLC.

O próximo componente é o Indutor. Segundo [Nilsson e Riedel \(2015, p. 190\)](#), “[...] Indutor é um componente elétrico que se opõe a qualquer alteração na corrente elétrica. É composto de um condutor em espiral, enrolado em um núcleo de suporte cujo material pode ser magnético ou não”. Conforme [Souza \(2017, p. 40\)](#), ele também é conhecido por bobina e armazena a energia gerada pelo campo magnético gerado quando a corrente elétrica flui através dele (do Indutor). Essa energia pode ser liberada posteriormente.

Para finalizar, o terceiro elemento é o Capacitor. Ele é “[...] um componente elétrico que consiste em dois condutores separados por um material isolante ou dielétrico. O Capacitor é o único dispositivo, além da bateria, que pode armazenar carga elétrica” ([NILSSON; RIEDEL, 2015, p. 190](#)).

Os dois últimos componentes, o Indutor e Capacitor, armazenam, respectivamente, energia nos campos magnético e elétrico. Nesse sentido, exemplos de suas aplicações, de acordo com [Nilsson e Riedel \(2015, p. 190\)](#), são a vela de ignição para o Indutor e o acendimento de um *flash* de uma máquina fotográfica para o Capacitor. Na próxima seção serão vistas as aplicações desses três elementos em conjunto.

3.2 Aplicações do Circuito Indutivo, Capacitivo E Resistivo (RLC)

Esta seção será dedicada às aplicações práticas do Circuito RLC. Após explorar as características individuais dos componentes e entender como eles interagem, serão apresentados exemplos reais que demonstram como o Circuito RLC está presente no nosso dia a dia, muitas das vezes sem que percebamos, em diversos contextos e ambientes, desde as telecomunicações até a medicina e a segurança de estabelecimentos comerciais. Assim, espera-se despertar a curiosidade do leitor para que ele identifique essas aplicações no seu cotidiano.

3.2.1 Telecomunicações

É o mais clássico exemplo de aplicações dos Circuitos RLC. Será abordado, brevemente, sobre circuitos de seleção de frequências que são denominados de filtros conforme [Nilsson e Riedel \(2015, p. 580-581\)](#). Ainda, segundo o mesmo autor, eles são aplicados nos dispositivos de comunicação como rádios, televisores e satélites.

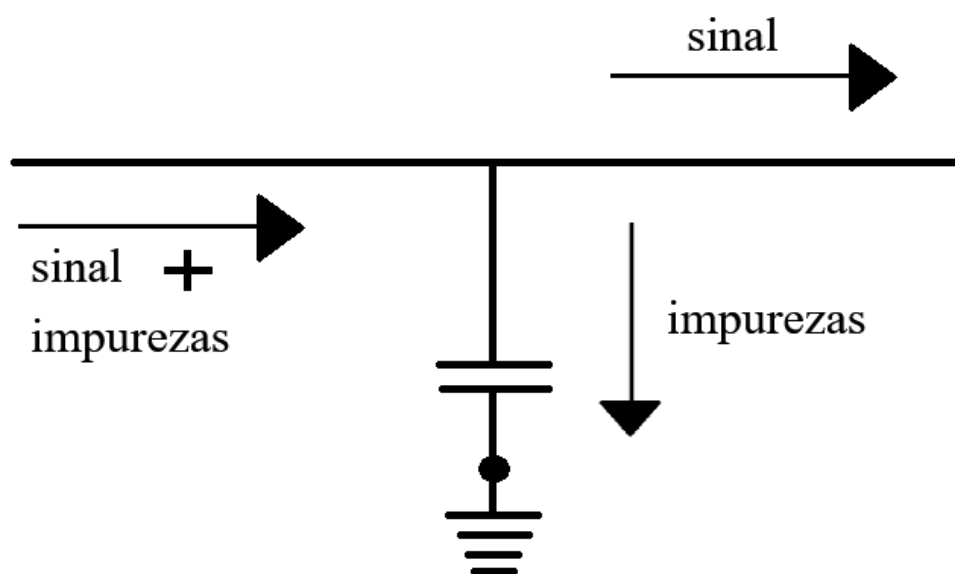
De acordo com [Barcelos Neto \(2011, p. 325-326\)](#) e [Nilsson e Riedel \(2015\)](#), Circuitos RL, RC e RLC podem funcionar como filtros, tais como filtros passa-baixas, filtros passa-altas, filtros passa-faixa, filtros rejeita-faixa, diversos filtros ativos e outros. Cada um desses tipos de filtros possui suas especificidades e são utilizados em contextos específicos, como por exemplo, filtrar frequências baixas, altas ou de uma faixa de frequência específica.

Em geral, os filtros têm esse nome devido à sua função de filtrar as frequências,

permitindo que o sinal desejado (ou frequências desejadas) avance e entre no receptor, enquanto as “impurezas” (frequências indesejadas) são filtradas e não chegam ao receptor, conforme ilustrado na Figura 2.

Além de sua função de filtragem, segundo Nunes (2018), os Circuitos RLC são transmissores de onda eletromagnética. Assim, esses circuitos desempenham um papel fundamental nas telecomunicações em geral, transmitindo as ondas eletromagnéticas apropriadas para as aplicações específicas.

Figura 2 – Capacitor funcionando como filtro



Fonte: Barcelos Neto (2011, p. 326)

Por exemplo, conforme Nilsson e Riedel (2015), em um rádio, os filtros desempenham o papel de selecionar o sinal de uma estação específica, permitindo que apenas as frequências correspondentes à estação desejada sejam recebidas. Da mesma forma, em um telefone, os filtros são utilizados para sinalizar o acionamento de uma tecla, filtrando as frequências associadas a cada botão pressionado. Esses são apenas alguns exemplos que ilustram o uso prático e relevante dos filtros em dispositivos de telecomunicação.

Assim, os circuitos RLC, por meio da seleção de frequências realizada pelos filtros e da transmissão de ondas eletromagnéticas, estão presentes em rádios, televisores, telefones e outros equipamentos de telecomunicação, possibilitando a transmissão adequada das informações e o recebimento dos sinais de forma adequada.

3.2.2 Medicina

Na área da Medicina, existem diversos equipamentos com Circuito RLC. Destaco os bisturis elétricos com conversor ressonante e os desfibriladores, por ambos

serem amplamente reconhecidos e utilizados. No primeiro exemplo, tem-se uma alternativa muito eficaz aos bisturis de aço inoxidável, sendo bastante usados atualmente devido à capacidade de realizar cirurgias menos invasiva em muitos casos (FAVI, 2018).

Já o segundo exemplo são os equipamentos eletrônicos desfibriladores que são baseados em Circuito RC, LC ou RLC (SOUZA, 2012). Eles estão presentes em hospitais e ambulâncias para serem utilizados em situações de emergência de arritmia cardíaca grave. Sua presença também é frequente em filmes, onde são exibidas cenas da sua utilização. Esses dispositivos são projetados para administrar um choque elétrico controlado ao coração, com o objetivo de reverter a arritmia e restaurar o ritmo cardíaco normal.

Portanto, desde o ambiente cirúrgico até a reanimação de uma pessoa com arritmia cardíaca, os equipamentos baseados nos circuitos RLC estão presentes e inclusive ajudam de forma direta a salvar vidas. Logo, a Medicina é um belo exemplo de aplicações dos Circuitos RLC, com equipamentos essenciais e de grande importância em situações de emergência e nos hospitais.

3.2.3 Alarme antifurto

Esta subseção destaca uma aplicação do Circuito RLC muito presente no nosso cotidiano. Ao visitarmos diversas lojas varejistas de vestuário, é possível observar as antenas antifurtos e os alarmes antifurtos nas roupas, conforme ilustrado na Figura 3.

De acordo com Nunes (2018), as antenas antifurtos possuem bobinas, Indutor, por outro lado, os alarmes colocados nas roupas ou no código de barras, conforme Figura 3, possuem um Circuito RLC. Daí, o alarme é acionado quando o produto passa pela antena antifurto. Existem diversas formas de detecção realizadas pela antena, dependendo dos dispositivos usados.

Assim, o Circuito RLC desempenha um papel fundamental como sistema de antena antifurto e alarme antifurto, contribuindo para a segurança de lojas varejistas em geral, além de bibliotecas e outros tipos de estabelecimentos. Além disso, conforme Nunes (2018), essa tecnologia possui diversas outras aplicações, incluindo uma utilização recente em supermercado sem caixas, onde os clientes têm a possibilidade de fazer compras sem a necessidade de um funcionário presente.

3.2.4 Exploração sobre as aplicações de Circuito Indutivo, Capacitivo E Resistivo (RLC)

Além da apresentação de aplicações práticas do Circuito RLC nas áreas tecnológicas e na engenharia, podemos não apenas mencioná-las, mas também explorá-las. Isso é particularmente motivador para aqueles com afinidade por essas áreas, devido a possibilidade de um contato mais próximo com a prática dessas aplicações.

Nesse sentido, tem-se a possibilidade de uma abordagem prática no aprendizado. Um exemplo é a aula prática com uma montagem de um rádio AM baseado em um Circuito RLC simples, conforme mostra a Figura 4 e Figura 5, feita por [Alves et al. \(2019\)](#), os quais esclarecem que:

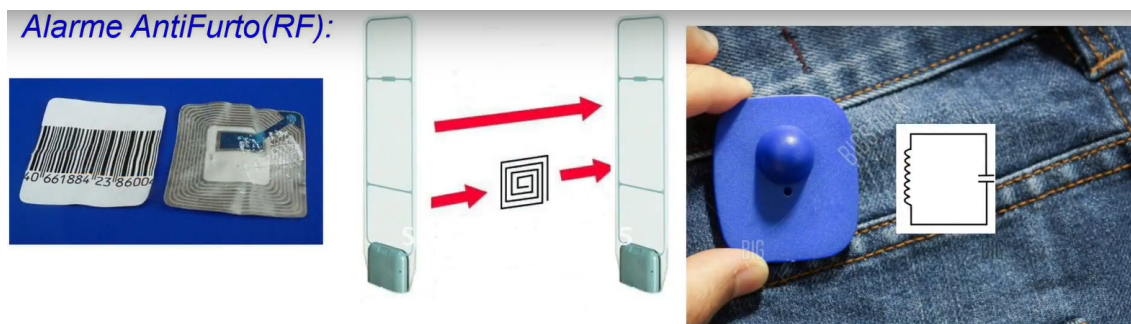
Ao contrário dos rádios comerciais, a montagem deste, assim como a do rádio de galena com antena varal, é de baixíssima complexidade, consistindo de apenas quatro componentes elétricos, não necessitando ligá-lo a fonte de tensão para seu funcionamento. A simplicidade desse sistema instiga a curiosidade no aprendizado por parte dos alunos, pois rádio é um instrumento de comunicação global que faz parte do desenvolvimento tecnológico e tem grande importância na difusão do ensino de física e engenharia. Por exemplo, a questão da transmissão por milhares de quilômetros, sem conexão com fios elétricos, de informação que viaja a velocidade da luz geralmente atrai atenção de muitos estudantes nas áreas de física e engenharias, tanto pelo rico contexto histórico como pela física deslumbrante envolvida ([ALVES et al., 2019](#), p. 46).

Ainda, sobre aulas práticas envolvendo circuito RLC, destaco que o próprio ensino de Física sobre esse assunto é pouco prático e precisa de mais aulas como essa, ainda mais, devido a tecnologia estar a cada dia mais presente na nossa sociedade.

Nesse contexto, o ensino da ressonância em circuitos elétricos consiste na abordagem de circuitos simples apresentados em livros, tendo pouca ênfase na contextualização de suas aplicações práticas. Geralmente, um Resistor, um Capacitor e um Indutor são ligados em série e alimentados por um gerador de sinais, sendo discutidas questões como defasagens entre tensões nos elementos do circuito, corrente elétrica e a ressonância eletromagnética. Nesses experimentos tradicionais coleta-se um conjunto de dados visando verificar a validade das equações - percebidas como fórmulas por grande parte dos estudantes - relacionadas ao assunto [2,3]. Nenhum modelo para aplicação tecnológica é abordado nesses experimentos ([ALVES et al., 2019](#), p. 46).

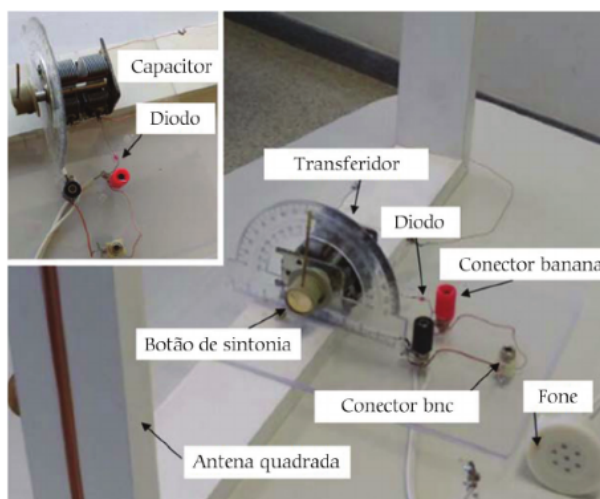
Portanto, nota-se que o ensino de Circuitos Elétricos é pouco contextualizado e raramente aborda, ou pelo menos exemplifica, suas diversas aplicações práticas. Assim, da mesma forma que neste trabalho será apresentado o uso da Matemática Básica em aplicações práticas, também existem inúmeras possibilidades, para destacar, exemplificar e explicar o uso da Física no cotidiano que podem ser exploradas.

Figura 3 – Alarmes antifurto e antena antifurto



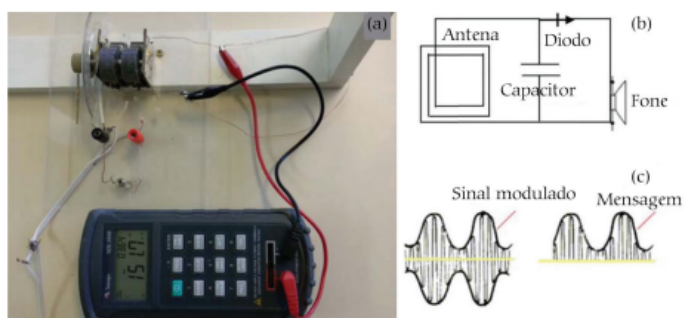
Fonte: Nunes (2018)

Figura 4 – Montagem do rádio com antena de quadro e todos seus componentes



Fonte: Alves et al. (2019, p. 49)

Figura 5 – Rádio AM montado. (a) Conexões com o multímetro LCR para obtenção da indutância (em μH) da antena de quadro. (b) Diagrama da ligação dos componentes do rádio. (c) À esquerda, ilustração do sinal da onda portadora com a modulação, que seria observado com um osciloscópio ligado aos terminais do Capacitor. À direita, a filtragem realizada pelo diodo permite a passagem de apenas uma banda do sinal modulado, transmitindo a mensagem.



Fonte: Alves et al. (2019, p. 50)

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste Capítulo será abordado o conteúdo matemático necessário para fazermos a dedução das soluções gerais das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem relacionadas a Circuito RLC. Assim, nosso principal conteúdo são as EDOs.

Posteriormente, será visto que as EDOs são um tipo de Equações Diferenciais (EDs). As EDs têm muitas aplicações. De acordo com [Yartey e Ribeiro \(2017, p. 8\)](#), em muitas Leis Físicas se utiliza modelos matemáticos que envolvem a taxa de variação, ou seja, a derivada, de uma grandeza física. Assim, esses fenômenos físicos são descritos por equações com derivadas, denominadas de Equações Diferenciais.

4.1 Equação Diferencial e a classificação quanto ao tipo

Na introdução, foi exposto que Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são um tipo de Equações Diferenciais (ED). Mas afinal, o que é uma ED? Segundo [Yartey e Ribeiro \(2017, p. 8\)](#); [Zill \(2014, p. 2\)](#), considerando as variáveis dependentes, por exemplo, y e r , e variáveis independentes, por exemplo, x e t , segue que uma ED é uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Elas podem ser classificadas por tipo em Equação Diferencial Parcial (EDP) e em Equação Diferencial Ordinária (EDO). Neste trabalho, há interesse na EDO que é, conforme ([ZILL, 2014, p. 2](#)), caracterizada por envolver apenas derivadas ordinárias, sendo uma ou mais variáveis dependentes e uma única variável independente. O mesmo autor denomina de “EDP” as equações com derivadas parciais, sendo uma ou mais variáveis dependentes e duas ou mais variáveis independentes.

Por exemplo, as seguintes Equações são Diferenciais Ordinárias:

- $\frac{dy}{dx} + 9x = e^x,$
- $\frac{5d^2y}{dx^2} + \frac{3dy}{dx} + 2y = 0,$
- $\frac{4dx}{dt} + \frac{7dy}{dt} = 3x + 2y.$

E são exemplos de Equações Diferenciais Parciais:

- $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$
- $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

4.2 Equações Diferenciais Ordinárias

A partir de agora, abordar-se-á apenas sobre as EDs que são EDOs. Por isso, para simplificar a escrita, a palavra “equação” será frequentemente empregada como sinônimo de EDO. Nesse sentido, nesta seção, inicia-se a exploração dessas equações, abordando sua Definição formal.

Já sabemos que a EDO é uma equação que contém as derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente. Entretanto, por ser conveniente, na Definição, serão consideradas como EDOs apenas as equações com uma variável dependente. Assim, por razões práticas e teóricas segue a seguinte definição de EDO:

Definição 1. (ZILL, 2014, p. 3) *EDO de ordem n é uma função definida implicitamente por:*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ com } n \neq 0.$$

A função $y = y(x)$ é desconhecida e será considerado que o Domínio e o Contradomínio são os números reais. Observe que nesta Definição usou-se o termo “EDO de ordem n ”. A ordem é um tipo de classificação. Essa e outras classificações serão abordadas a seguir.

4.3 Classificação das Equações Diferenciais Ordinárias

Para se determinar os métodos apropriados de soluções é útil classificar as EDOs quanto a ordem, linearidade e homogeneidade. A equação usada na pesquisa será a EDO Linear Homogênea com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem. Por isso, primeiro, serão apresentadas as classificações das EDOs.

4.3.1 Quanto a ordem

Observe que nas EDOs a maior derivada pode ser a primeira derivada ou a segunda derivada ou a terceira derivada, e assim por diante. “Primeira”, “segunda”, “terceira” são as ordens da derivada. Isso sugere a nossa primeira classificação que é por ordem. Dessa forma, a ordem de uma EDO é a ordem da maior derivada (ZILL, 2014, p. 3). Assim, as EDOs a seguir são respectivamente de primeira ordem, segunda ordem e ordem n :

- $\frac{dy}{dx} + y = x^2$,
- $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$,
- $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$.

4.3.2 Quanto a linearidade

Neste trabalho, as equações lineares foram escolhidas na realização da pesquisa devido suas propriedades e métodos de resolução específicos mais simples. Assim, será apresentada a seguir a classificação das Equação Diferenciais em relação a sua estrutura, ou seja, em linear ou não linear.

Uma EDO de ordem n , na forma da Definição 1, é linear se F for linear em $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ (ZILL, 2014, p. 3). Portanto, y e suas derivadas são do primeiro grau e os seus coeficientes são constantes ou dependem da variável independente x .

Uma EDO que não é linear é classificada de não linear. Será exposto, a seguir, exemplos de EDOs não lineares, de forma a ficar mais claro o que a equação não pode ter para ser linear:

- $\frac{(y)dy}{dt} + 5y = e^x$
- $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$
- $\frac{dy}{dt} = y - ky^2$

No primeiro exemplo, o coeficiente da derivada depende de y , mas o coeficiente só poderia ser uma constante ou depender de x . No segundo exemplo, a função $\sin(\theta)$ não é linear. No terceiro exemplo, y não é do primeiro grau (se uma EDO é linear então y e suas derivadas são do primeiro grau). Assim, todos são exemplos de EDOs não lineares.

4.3.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Homogêneas

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) Lineares podem ser classificadas em Homogêneas e Não Homogêneas. Na subseção anterior, foi apresentado um conceito para EDOs lineares. Entretanto, a homogeneidade de EDOs Lineares está relacionada a forma algébrica específica de uma EDO Linear. Por isso, primeiro será apresentada a seguinte Definição para equação linear:

Definição 2. (ZILL, 2014, p. 126) *Uma equação diferencial ordinária é chamada de equação linear na variável dependente y se pode ser escrita na forma:*

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \text{ (ZILL, 2014, p. 126)}$$

Nesta equação $a_n(x) \neq 0$ e os coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ são lineares e contínuos. Daí essa equação é classificada em homogênea se $g(x) = 0$, por outro lado se $g(x) \neq 0$ a equação é classificada como não homogênea. Portanto, tem-se a seguinte Definição para EDO homogênea:

Definição 3. (ZILL, 2014, p. 126) Uma EDO de ordem n , linear, é chamada de **equação homogênea** na variável dependente y se pode ser escrita na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0.$$

Note que substituindo $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ por 0 obtém-se uma solução, trivial, dessa equação. Mas, ainda não foi abordado formalmente sobre o que seria uma solução dessas equações, isso será feito na seção 4.4. Antes disso, será abordada a classificação de EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes. Essa será a EDO utilizada na pesquisa.

4.3.4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

As EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes se caracterizam por conta de todos os seus coeficientes serem constantes. Dessa forma os coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ da Definição 3 serão constantes reais. Um exemplo é:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

Neste exemplo, a variável dependente é $q = q(t)$, a independente é t e L, R e $C \in \mathbb{R}$. Observe que L, R e C não dependem de t e são constantes reais. Assim a equação do exemplo é uma EDO Linear Homogênea com Coeficientes Constantes. Este tipo de EDO será formalizado na seguinte Definição:

Definição 4. Uma EDO de ordem n , linear, é chamada de **equação homogênea com coeficientes constantes** na variável dependente y , sendo $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ constantes, se pode ser escrita na forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

4.4 Solução de Equações Diferenciais Ordinárias

Um dos objetivos específico é a dedução detalhada das soluções das EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem. Para isso, inicialmente, será discutido sobre a solução de uma EDO em geral. Assim, considere uma EDO

de ordem n conforme Definição 1. Em uma equação sabe-se que a solução é o valor que torna a equação uma identidade. Também é assim para EDOs. Formalizando:

Definição 5. (YARTEY; RIBEIRO, 2017, p. 12) *Seja I um intervalo e $y(x)$ uma função definida em I . Dizemos que $y(x)$ é uma **solução explícita** da Equação Diferencial Ordinária de ordem n , no intervalo I , se satisfaz as seguintes condições:*

1. *A função $y(x)$ é n vezes diferenciável em I .*
2. *Substituindo $y(x)$ e suas derivadas na equação $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, obtém-se uma identidade verdadeira para todo $x \in I$.*

Como exemplo será verificado se a seguinte função $y = e^{-x} + x - 1$ é uma solução da EDO $\frac{dy}{dx} + y = x$. De fato, substituindo y na EDO, resulta que o lado esquerdo da equação é:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + y &= \frac{d}{dx}(e^{-x} + x - 1) + (e^{-x} + x - 1) \\ &= -e^{-x} + 1 + e^{-x} + x - 1 \\ &= x.\end{aligned}$$

Daí, como o lado direito da equação é x , conclui-se que $x = x \Leftrightarrow 0 = 0$ (que é uma identidade). Portanto, a função $y = e^{-x} + x - 1$ é uma solução da EDO.

4.5 Método da equação auxiliar

O método da equação auxiliar ou equação característica é comumente utilizado para encontrar soluções para as EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de ordem n dada na forma da Definição 4. Será utilizado um exemplo para ilustrar como esse método pode ser aplicado.

Exemplo: encontrar a solução da equação $ay'' + by' + cy = 0$, onde a , b e c são constantes reais. Primeiro, note que isolando ay'' ou by' ou cy no primeiro membro, segue que cada um desses termos são combinações lineares dos outros termos. Isso sugere que a função y e a sua derivada primeira e segunda são “semelhantes”. Então, uma função elementar com essas características é a função exponencial, pois, se $y = e^{mx}$, com $m \in \mathbb{R}$, então $y' = me^{mx}$.

Realmente, as soluções da EDO linear homogênea de coeficientes constantes são da forma $y = e^{mx}$ e isso pode ser verificado substituindo a solução $y = e^{mx}$. Os valores de m serão encontrados a partir da equação auxiliar relacionada a EDO a ser resolvida e será mostrado a seguir que eles serão as raízes da equação característica.

Assim, no nosso exemplo, será feita a substituição da função $y = e^{mx}$ e das suas primeira e segunda derivada na EDO para verificar se a função é solução ou não. De fato, substituindo, na equação do exemplo, tem-se:

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

Daí, como a função exponencial é sempre diferente de zero, segue que:

$$am^2 + bm + c = 0$$

Essa é a equação auxiliar ou equação característica relacionada a EDO do exemplo. Note que como a EDO é de **segunda ordem**, a equação característica é uma equação polinomial **2º grau**. Portanto, realmente para a EDO do exemplo, a função $y = e^{mx}$ é solução desde que a equação característica $am^2 + bm + c = 0$ também tenha solução. A partir daí, resolvendo a Equação do Segundo Grau existem três casos a depender do discriminante da equação auxiliar, sendo no primeiro caso o discriminante positivo, no segundo igual a zero e no terceiro negativo. Esses casos serão abordados na próxima seção e na dedução detalhada da solução desses tipos de EDOs de segunda ordem.

Por agora, note que a EDO linear homogênea de coeficientes constantes na variável dependente y tem solução da forma $y = e^{mx}$ e sempre é possível encontrar uma equação auxiliar, para encontrar os “ m ”. Portanto, dada a EDO de ordem n

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (4.1)$$

Tem-se a seguinte equação auxiliar de grau n associada a ela:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0 \quad (4.2)$$

4.6 Solução de EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem

Para evitar repetição, nesta seção as EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes serão denominadas de simplesmente EDOs. Na seção anterior, foi apresentado o método da equação auxiliar de grau n , que encontra soluções da forma $y = e^{mx}$ para uma EDO de ordem n , onde m será as raízes da equação auxiliar.

Agora, considere o caso de uma EDO de 2º ordem: $ay'' + by' + cy = 0$, onde a , b e c são constantes e a variável independente é t . Já sabemos que a solução será do tipo $y = e^{mx}$ e a equação auxiliar associada será $am^2 + bm + c = 0$. Ao resolver essa equação temos duas soluções m_1 e m_2 . Essas raízes têm três casos a depender do valor do discriminante Δ :

Caso 1: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Assim, as raízes são reais e distintas, ou seja, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ e $m_1 \neq m_2$ e as soluções encontradas da EDO serão $y(t) = e^{m_1 t}$ e $y(t) = e^{m_2 t}$.

Caso 2: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Neste caso, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ e $m_1 = m_2$. Daí, a solução será $y(t) = e^{m_1 t}$. Será visto mais adiante que é preciso encontrar duas soluções e conforme Zill e Cullen (2007, p. 174) essa outra solução será dada neste caso por $y(t) = te^{m_1 t}$. Assim, nossas soluções são $y(t) = e^{m_1 t}$ e $y(t) = te^{m_1 t}$.

Caso 3: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então, $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$ e $m_1 \neq m_2$. Daí, as raízes complexas podem ser escritas assim: $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$. Assim, poderíamos escrever duas soluções de forma análoga ao caso 1, mas, usando a fórmula de Euler conforme detalhado no próximo Capítulo, na Seção 5.1, temos as seguintes soluções $y(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $y(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Antes de prosseguirmos serão apresentados algumas definições e considerações com o objetivo de deduzir as soluções gerais dos casos abordados anteriormente. A primeira dessas definições é a de Solução Geral - Equações Homogêneas:

Definição 6. (ZILL; CULLEN, 2007, p. 160) *Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de ordem n em um intervalo I . A Solução Geral para a equação no intervalo dado é definida por $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$, em que $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes arbitrárias.*

Agora, usando a Definição 4.6 para o caso $n = 2$, abordado anteriormente em três casos, têm-se a Solução Geral para EDO, a saber: $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$. Sobre a linearidade das soluções, será abordado mais adiante, ainda nesta seção, por enquanto considere que elas são linearmente independentes. Então, neste caso, as duas soluções encontradas, no caso 1, 2 e 3, formam a Solução Geral da EDO da seguinte forma: **Caso 1:** $y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_2 t}$, **Caso 2:** $y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$ e **Caso 3:** $y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$.

Portanto, a partir das soluções “ m ” da equação auxiliar, sendo o $m \in \mathbb{R}$, para o caso 1 e 2, e $m = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ para o caso 3, se obtém duas soluções para EDO de segunda ordem. Com essas duas soluções pode-se encontrar a Solução Geral das EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem, bastando substituir as duas soluções na Definição de Solução Geral - Equações Homogêneas.

Outro conceito a ser abordado é a independência linear do conjunto das soluções, para verificar se as soluções são linearmente independentes, possibilitando assim a aplicação da Definição das soluções gerais (que requer o uso de soluções linearmente independentes). Neste contexto, utilizaremos os conceitos de Álgebra linear de dependência e independência linear de n vetores de um espaço vetorial n , sendo, no nosso caso específico, n funções ou soluções do espaço vetorial das soluções de uma EDO de ordem n . Dessa

forma, a próxima Definição é de Independência Linear de funções (soluções):

Definição 7. Dizemos que o conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é **linearmente independente** em um intervalo I se $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ for a única solução, para todo x do intervalo, de:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

Por outro lado, caso o conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ não seja linearmente independente, então denominaremos esse conjunto de **linearmente dependentes**. Observe que, utilizando essa Definição, se existir outra solução além da trivial, então é certo que esse conjunto é linearmente dependente, mas em relação a provar a independência linear, mesmo no caso em que não se encontre essa solução, não é garantido que essa solução não exista e provar essa não existência não é tão simples, dessa forma, em geral, a Definição 7 não é adequada para ser utilizada para verificar se um conjunto de funções é linearmente independente.

Assim, usaremos outra Definição equivalente que é a do Wronskiano (que normalmente é visto nos livros da disciplina de EDO como teorema). Ela é uma ferramenta prática normalmente usada para garantir a independência linear de n funções relacionando o determinante das funções e suas derivadas da seguinte forma, conforme adaptado de Zill e Cullen (2007, p. 149):

Definição 8. Se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ são diferenciáveis em pelo menos $n - 1$ vezes e o determinante

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto x do intervalo I , então as funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são **linearmente independentes** no intervalo.

O determinante da Definição anterior é denominado de **Wronskiano** e pode também ser denotado como $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Portanto, agora podemos verificar a linearidade das soluções da EDO de segunda ordem vista anteriormente para cada um dos seus três casos. Será usada como variável independente o “ t ”, de tempo, pois, essa será a variável usada na dedução da pesquisa.

Para o **Caso 1** a Solução Geral é $y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$. Vamos verificar se realmente as soluções $e^{m_1 t}$ e $e^{m_2 t}$ são linearmente independentes como foi suposto

anteriormente. De fato, o Wronskiano é dado por:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{m_1 t} & e^{m_2 t} \\ m_1 e^{m_1 t} & m_2 e^{m_2 t} \end{vmatrix} = m_2 e^{(m_1 + m_2)t} - m_1 e^{(m_1 + m_2)t} = (m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2)t}$$

Observe que $(m_2 - m_1) \neq 0$ e $e^{(m_1 + m_2)t} \neq 0$. Portanto, esse conjunto de soluções é realmente independente e forma uma Solução Geral. A verificação para os casos 2 e caso 3 serão feitas na Seção 5.1 do próximo Capítulo.

4.7 Equações Diferenciais Ordinárias e o Circuito Indutivo, Capacitivo E Resistivo (RLC)

Nesta parte do trabalho se iniciará a utilização dos conceitos e da teoria de EDOs em Circuitos RLC. Para isso, primeiro será abordado um pouco mais sobre os Circuitos.

Anteriormente, foi apresentado que o Circuito RLC é composto por três elementos, a saber, Resistor (R), Indutor (L) e Capacitor (C). Dessa forma quando o circuito RLC está funcionando, ou seja, alimentado por uma fonte externa (por exemplo uma bateria) ocorre alguns fenômenos devido às características desse circuito.

Nesse sentido, um desses fenômenos é a queda de tensão. No Indutor a queda de tensão, segundo Nilsson e Riedel (2015, p. 191), é a taxa de variação da corrente ao longo tempo. Em símbolos é dada pela equação (4.3), sendo V_L a queda de tensão medida em volts no Indutor, L a indutância medida em henrys e di/dt a taxa de variação da corrente, medida em amperes, em relação ao tempo, medido em segundos.

$$V_L = L(di/dt) \quad (4.3)$$

Ainda sobre a queda de tensão, no Resistor ela é proporcional a corrente e a resistência, ou seja, é expressa pela equação (4.4). Sendo V_R a queda de tensão, em volts, no Resistor, R a resistência elétrica, em ohms e I a corrente elétrica em amperes. De acordo com Nilsson e Riedel (2015, p. 32), esta equação é conhecida como lei de Ohm, em homenagem ao físico alemão Geor Simom Ohn que demonstrou sua validade no início do século XIX.

$$V_R = RI \quad (4.4)$$

Por fim, no Capacitor, de acordo com Boylestad (2012, p. 336), a Definição da sua capacitância C , medida em farads (F), é definida como a razão entre a carga armazenada q e a tensão aplicada ao Capacitor, ou seja, em símbolos é representada pela igualdade 4.5. Daí segue que a queda de tensão no Capacitor é dada pela equação (4.6),

sendo V_C a queda de tensão no Capacitor, dada em volts, C a capacitância do Capacitor, medida em farads (F) e q , dado em coulombs (C), a carga acumulada no Capacitor.

$$C = \frac{1}{V_C} q(t) \quad (4.5)$$

$$V_C = \frac{1}{C} q(t) \quad (4.6)$$

Assim, quando o Circuito RLC está em funcionamento existe essas três quedas de tensão em cada um dos componentes. Observe que na primeira tem uma derivada (taxa de variação). Isso sugere que pode ser utilizada uma EDO para modelar esses fenômenos.

Portanto, pelo o que foi exposto na Seção 3.1, onde foram abordadas algumas propriedades dos componentes do Circuito RLC, e o que foi exposto nesta seção, quando uma tensão elétrica é aplicada a um circuito RLC, o Capacitor armazena carga elétrica, o Indutor armazena energia magnética e o Resistor dissipa energia na forma de calor. A carga elétrica e a energia magnética são armazenadas e liberadas ao longo do tempo, o que resulta em um comportamento dinâmico do circuito. Para descrever esse comportamento, será utilizada uma EDO que relaciona a carga com as propriedades elétricas do circuito.

Para isso, será utilizada a lei das tensões de Kirchhoff, que descrevem as relações entre as correntes e tensões em um circuito elétrico. Ela pode ser enunciada da seguinte maneira: “a soma algébrica de todas as tensões ao longo de qualquer caminho fechado em um circuito é igual a zero” (NILSSON; RIEDEL, 2015, p. 40).

Uma consequência é que, de acordo com Boylestad (2012, p. 123), o somatório das elevações de tensão no circuito é igual ao somatório das quedas de tensão no circuito. Em símbolos ela está representada em (4.7).

$$\sum V_{\text{elevações}} = \sum V_{\text{quedas}} \quad (4.7)$$

Portanto, considere um circuito RLC em série, em que a corrente elétrica é a mesma em todos os componentes, ligado a uma fonte externa de tensão E . Essa fonte de tensão é o somatório das tensões de elevação do circuito. Então pela equação (4.7), num instante t , em segundos, a soma das quedas de tensão é igual a fonte da tensão E , em volts:

$$\sum V_{\text{elevações}} = E(t) \quad (4.8)$$

Por outro lado, já foram obtidas as equações das quedas de tensões no Indutor (4.3); Resistor (4.4) e Capacitor (4.6). Então, pela lei das tensões de Kirchhoff aplicada ao circuito tem-se a equação (4.9). Observe que essa equação ainda não é uma EDO conforme Definição 1, pois possui duas funções, a saber, $i(t)$ e $q(t)$.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q(t) = E(t) \quad (4.9)$$

Mas, de acordo com Yartey e Ribeiro (2017), a corrente é a derivada da carga em relação ao tempo. Então, é possível simplificar a equação (4.9) ao substituir a corrente pela derivada da carga em relação ao tempo e a derivada da corrente pela segunda derivada da carga em relação ao tempo. Fazendo as substituições, a equação (4.10) é obtida:

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = E(t) \quad (4.10)$$

Considerando as condições iniciais do circuito RLC, em que não há uma fonte de tensão externa atuando sobre ele, tem-se ($E(t) = 0$). Nesse caso, a equação que descreve o comportamento do circuito é:

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = 0 \quad (4.11)$$

Essa última equação é uma EDO Linear Homogênea com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem, sendo q a variável dependente e t a variável independente. Neste trabalho, um dos objetivos é deduzir de forma detalhada as soluções gerais das EDOs desse tipo. Dessa forma, será possível aplicar essas soluções à equação (4.10) relacionada ao circuito RLC.

Após a dedução, serão realizados, conforme procedimentos metodológicos, os demais procedimentos previstos na pesquisa, tais como identificar e descrever os conteúdos, as habilidades, as competências e o ano escolar dos conteúdos da Matemática Básica usados na dedução, além de analisar a forma como foram utilizados.

5 DEDUÇÃO DAS SOLUÇÕES E RESULTADOS

Em conformidade com os procedimentos metodológicos, neste Capítulo, primeiro será realizada a dedução das soluções das EDOs relacionadas ao Circuito RLC, sendo destacado diretamente, de forma conveniente, conteúdos da Matemática Básica através do uso do negrito e de retângulo azuis. Após a etapa anterior, esses conhecimentos da Matemática do Ensino Fundamental e Médio serão descritos ou apresentados por meio de tabelas.

5.1 Dedução das Soluções Gerais das Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem relacionadas ao Circuito RLC

Na última seção foi obtida a equação (4.11) que descreve o funcionamento de um Circuito RLC em suas condições iniciais, em que não há uma fonte de tensão externa atuando sobre ele, ou seja, $E(t) = 0$. Esta é uma EDO Linear Homogênea com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem na variável $q = q(t)$. Assim, para simplificar a escrita, considere a mesma EDO, na variável $y = y(t)$ com $t \in I$:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

Essa EDO foi usada como exemplo nas seções 4.5 e 4.6. Nestas seções, foi visto que por conta da EDO ser de segunda ordem, então teremos duas soluções y_1 e y_2 formando a sua Solução Geral que será dada por:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (5.2)$$

Procura-se determinar as funções $y = y(t)$ que atendam a EDO 5.1. Inicialmente, serão determinadas duas soluções linearmente independentes $y_1(t)$ e $y_2(t)$ para se poder formar a Solução Geral. Dessa forma, pelos mesmos motivos discutidos na seção sobre o método da equação característica, as soluções serão do tipo:

$$y(t) = e^{mt}, \quad m \in \mathbb{R},$$

Daí, a primeira e segunda derivada são:

$$y'(t) = me^{mt} \quad \text{e}$$

$$y''(t) = m^2 e^{mt}$$

Substituindo na EDO obtém-se:

$$am^2e^{mt} + bme^{mt} + ce^{mt} = 0$$

Agora, usando a **fatoração por fator comum em evidência**:

$$(am^2 + bm + c)e^{mt} = 0$$

Note que e^{mt} pode ser simplificado (dividindo ambos os membros da equação por esse termo), pois se trata de uma **função exponencial** e por isso $e^{mt} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, então concluímos que:

$$am^2 + bm + c = 0. \quad \text{Daí, } m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{equação do 2º grau}$$

Portanto, para determinar o “ m ” deve ser resolvida a equação característica do 2º grau. Dessa forma, será dividido em três casos a depender do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Esses casos são $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Em cada caso serão encontradas duas soluções linearmente independentes que satisfazem a EDO 5.1 e essas soluções serão substituídas na equação de Solução Geral 5.2.

5.1.1 Dedução do primeiro caso

Caso 1: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Assim, as raízes são reais e distintas, ou seja, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ e $m_1 \neq m_2$ e as soluções encontradas da EDO serão $y(t) = e^{m_1 t}$ e $y(t) = e^{m_2 t}$.

Agora, vamos verificar se as soluções são linearmente independentes. Para isso, será calculado o Wronskiano das soluções que é o seguinte **determinante**:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{m_1 t} & e^{m_2 t} \\ m_1 e^{m_1 t} & m_2 e^{m_2 t} \end{vmatrix}$$

Resolvendo o determinante e usando as **propriedades das potências de mesma base**:

$$W(t) = m_2 e^{(m_1 + m_2)t} - m_1 e^{(m_1 + m_2)t}$$

$$W(t) = (m_2 - m_1)e^{(m_1 + m_2)t}.$$

Observe que $(m_2 - m_1) \neq 0$ e $e^{(m_1 + m_2)t} \neq 0$. Portanto, o conjunto de funções formado pelas duas soluções é realmente linearmente independente e forma a Solução Geral: $y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$ para este caso.

5.1.2 Dedução do segundo caso

Caso 2: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Então, tem-se duas raízes iguais, a saber, $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$ e uma solução é a **função exponencial** $y_1 = e^{m_1 t}$.

Dessa forma, é preciso encontrar outra solução linearmente independente para formar a Solução Geral. Daí, conforme [Yartey e Ribeiro \(2017, p. 99\)](#), usando a variação dos parâmetros: se $y_1 = e^{m_1 t}$, então a segunda solução é da forma $y_2(t) = u(t)e^{mt}$. Assim, a primeira derivada $(y_2)'(t)$ é:

$$(y_2)'(t) = u'e^{mt} + mue^{mt}$$

E a segunda derivada $(y_2)''(t)$ é:

$$(y_2)''(t) = u''e^{mt} + mu'e^{mt} + mu'e^{mt} + m^2ue^{mt}$$

$$(y_2)''(t) = u''e^{mt} + 2mu'e^{mt} + m^2ue^{mt}$$

Substituindo na EDO (5.1):

$$a(u''e^{mt} + 2mu'e^{mt} + m^2ue^{mt}) + b(u'e^{mt} + mue^{mt}) + c(e^{mt}) = 0$$

$$au''e^{mt} + 2amu'e^{mt} + am^2ue^{mt} + bu'e^{mt} + bmu'e^{mt} + cu'e^{mt} = 0$$

$$au''e^{mt} + 2amu'e^{mt} + bu'e^{mt} + \cancel{(am^2 + bm + c)ue^{mt}} = 0$$

$$au''e^{mt} + 2amu'e^{mt} + bu'e^{mt} = 0$$

$$au''e^{mt} + (2am + b)u'e^{mt} = 0.$$

Substituindo $m = \left(\frac{-b}{2a}\right)$ (por ser o Caso 2), resulta em:

$$au''e^{mt} + \left[\cancel{\left(2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b\right)}\right]u'e^{mt} = 0 \iff au''e^{mt} = 0$$

Logo, por $e^{mt} \neq 0$ e $a \neq 0$ deve-se ter:

$$u'' = 0 \iff u'(t) = p \iff u(t) = pt + q, \text{ com } p, q \in \mathbb{R}$$

Toma-se, por simplicidade, $p = 1$ e $q = 0$. Assim $u(t) = t$.

Portanto, $(y_1)(t) = e^{mt}$ e $(y_2)(t) = te^{mt}$. Agora, vamos verificar se o conjunto formado por essas soluções é linearmente independente. De fato, o Wronskiano é dado por:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{mt} & te^{mt} \\ me^{mt} & e^{mt} + mte^{mt} \end{vmatrix}$$

Resolvendo o **determinante** e usando as **propriedades das potências de mesma base**:

$$\begin{aligned} W(t) &= e^{2mt} + mte^{2mt} - mte^{2mt} \\ W(t) &= e^{2mt} \end{aligned}$$

Portanto, o Wronskiano é diferente de zero para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, o conjunto de funções formado pelas duas soluções é realmente linearmente independente e forma a Solução Geral $y(t) = c_1e^{mt} + c_2te^{mt}$ para o caso 2.

5.1.3 Dedução do terceiro caso

Caso 3: Se $b^2 - 4ac < 0$, então pode-se considerar $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$ sendo números complexos com $\alpha = \left(\frac{-b}{2a}\right)$ e $\beta = \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}$. $\rightarrow$ Números Complexos

Daí, tem-se

$$(y_1)(t) = e^{m_1 t} \quad \text{e} \quad (y_2)(t) = e^{m_2 t}.$$

Substituindo as raízes complexas:

$$(y_1)(t) = e^{(\alpha + i\beta)t} \quad \text{e} \quad (y_2)(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}. \quad (5.3)$$

Note, que já temos duas soluções y_1 e y_2 , pertencentes aos Números Complexos, candidatas a formar a Solução Geral, “porém, na prática, preferimos trabalhar com funções reais, em vez de exponenciais complexas” (ZILL; CULLEN, 2007, p. 174).

Assim, vamos encontrar duas soluções reais a partir das soluções complexas (5.3) já encontradas. A Solução Geral até agora é:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

$$y(t) = c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$$

Daí, usando a distributiva e as **propriedades das potências**:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + c_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t}$$

Pela fórmula de Euler, tem-se a seguinte relação entre exponenciais complexas e a **Função Seno** e **Função Cosseno**: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ e $e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$. Assim, $e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \sin(\beta t)$ e $e^{-i\beta t} = \cos(\beta t) - i \sin(\beta t)$. Então, $y(t)$ é:

$$(y_t) = c_1 e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)] + c_2 e^{\alpha t} [\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)] = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

$$\Longleftrightarrow y_1(t) = e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)] \text{ e } y_2(t) = e^{\alpha t} [\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)]$$

Pode-se combinar linearmente $y_1(t)$ e $y_2(t)$, de forma conveniente, para formar outras soluções mais simples. Fazendo $y_3(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2}$ e $y_4(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i}$. Portanto, simplificando as **frações**, tem-se as seguintes soluções para o Caso 3:

$$y_3(t) = \frac{e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t) + \cos(\beta t) - i \sin(\beta t)]}{2}$$

$$y_3(t) = \frac{e^{\alpha t} [2 \cdot \cos(\beta t)]}{2} \Longleftrightarrow y_3(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t);$$

$$y_4(t) = \frac{e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t) - \cos(\beta t) + i \sin(\beta t)]}{2i}$$

$$y_4(t) = \frac{e^{\alpha t} [2 \cdot i \sin(\beta t)]}{2i} \Longleftrightarrow y_4(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Logo, temos duas soluções reais candidatas a formar a Solução Geral, a saber, $y_3(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $y_4(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, ou seja, antes as soluções eram exponenciais complexas e agora a primeira solução é uma exponencial real multiplicada pela **Função Cosseno** e a segunda solução é uma exponencial real multiplicada pela **Função Seno**. Dessa forma, elas formam a seguinte Solução Geral $y(t)$ para o caso 3:

$$y(t) = c_1 y_3(t) + c_2 y_4(t) \Longleftrightarrow y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Falta a verificação se estas soluções realmente são linearmente independentes. De fato, o Wronskiano é dado por:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t) & \alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{vmatrix}$$

Resolvendo o **determinante** e usando as **propriedades das potências de mesma base** :

$$W(t) = \underline{\alpha e^{2\alpha t} \sen(\beta t) \cos(\beta t)} + \beta e^{2\alpha t} \cos^2(\beta t) - \underline{\alpha e^{2\alpha t} \sen(\beta t) \cos(\beta t)} + \beta e^{2\alpha t} \sen^2(\beta t)$$

Simplificando os dois termos destacados e usando a **fatoração por fator comum em evidência**, colocando em evidência o termo $\beta e^{2\alpha t}$:

$$W(t) = \beta e^{2\alpha t} [\sen^2(\beta t) + \cos^2(\beta t)]$$

Usando, a **relação fundamental da trigonometria** $\sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$, para $x = \beta t$, obtém-se:

$$W(t) = \beta e^{2\alpha t}$$

Note que se $\beta \neq 0$, então o Wronskiano $W(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e de fato por hipótese $\beta \neq 0$, pois caso $\beta = 0$, então as raízes $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$ seriam reais e iguais, ou seja, estaríamos no caso 2 já abordado. Portanto, $y_3(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $y_4(t) = e^{\alpha t} \sen(\beta t)$ formam um conjunto linearmente independente e constituem a seguinte Solução Geral $y(t)$ para o caso 3:

$$y(t) = c_1 y_3(t) + c_2 y_4(t) \iff y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sen(\beta t)$$

Observe que nesta Solução Geral temos apenas funções reais e $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, ou seja, α é a parte real da raiz da equação auxiliar e β é a parte imaginária. Portanto, assim como nos outros casos, para encontrar a Solução Geral basta resolver a equação auxiliar e substituir os dados adequados na equação geral de solução 5.2.

5.1.4 Exemplos simples do uso das Solução Gerais das Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem relacionadas ao Circuito RLC

Nesta subseção será feito alguns exemplos simples de cada caso para mostrar a aplicação da fórmula e também destacar o protagonismo da **Equação do Segundo Grau** na resolução das EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de Segunda Ordem. Além disso, essa subseção tem o papel de ser mais acessível ao aluno do Ensino Fundamental e Médio, sendo uma alternativa ou complemento para a dedução feita anteriormente. Nestes exemplos não usaremos a EDO 5.1: $ay'' + by' + cy = 0$ e sim a EDO 4.11 e seus coeficientes:

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = 0$$

Exemplo Caso 1: $L = 1, R = -5, C = \frac{1}{6}$. Então temos a seguinte EDO:

$$\frac{d^2q}{dt^2} - 5\frac{dq}{dt} + 6q = 0 \iff q'' - 5q' + 6q = 0$$

A equação auxiliar é:

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

As raízes são $m_1 = 3$ e $m_2 = 2$. Portanto a Solução Geral é:

$$q(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t}$$

Exemplo Caso 2: $L = 1, R = -4, C = \frac{1}{4}$. Então temos a seguinte EDO:

$$\frac{d^2q}{dt^2} - 4\frac{dq}{dt} + 4q = 0 \iff q'' - 4q' + 4q = 0$$

A equação auxiliar é:

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

As duas raízes são iguais e $m = 2$. Portanto a Solução Geral é:

$$q(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$$

Exemplo Caso 3: $L = 1, R = 4, C = \frac{1}{8}$. Então temos a seguinte EDO:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 4\frac{dq}{dt} + 8q = 0 \iff q'' + 4q' + 8q = 0$$

A equação auxiliar é:

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$

As duas raízes complexas são $m_1 = -2 + 2i$ e $m_2 = -2 - 2i$. Portanto a Solução Geral é:

$$q(t) = c_1e^{-2t} \cos(2t) + c_2e^{-2t} \sin(2t)$$

5.2 Conteúdos da Matemática Básica utilizados na dedução

Agora que já foi feita a dedução, se iniciará a apresentação e descrição dos conhecimentos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio que foram utilizados. Foram destacados diretamente no texto, respectivamente, os seguintes conteúdos em

negrito: Fatoração por Fator Comum em Evidência, Função Exponencial, Determinante, propriedades das potências de mesma base, Função Seno, frações, Função Cosseno e a Relação Fundamental da Trigonometria e com retângulos azuis: Equação do 2º Grau e sua fórmula resolutiva, Função Exponencial e Números Complexos.

Em resumo, temos os seguintes 5 (cinco) grupos de conteúdos: 1. Números Complexos; 2. Função Exponencial; 3. Função Seno, Função Cosseno e Relação Fundamental da Trigonometria; 4. Equação do 2º Grau e sua fórmula resolutiva, Fatoração por Fator Comum em Evidência, propriedades das potências de mesma base e frações; 5. Determinantes. Dessa forma a identificação, descrição e análise da forma que foram utilizados os conteúdos seguirá essa ordem.

Iniciaremos com os os Números Complexos, que foi um dos assuntos da Matemática Básica utilizado na dedução e o mais icônico deste trabalho. Serão feitas algumas considerações e discussões sobre a importância e a relação com outros assuntos da Matemática e se esse conteúdo está presente no currículo do Ensino Médio.

Em relação a importância, segundo [Lima \(1984\)](#), o “Teorema Fundamental da Álgebra” prova que todo polinômio de grau n possui n raízes complexas. Dessa forma, nos Números Complexos, é possível estudar as equações algébricas de forma mais completa. Por essa razão, frequentemente, o estudo dos Números Complexos precede o tópico de Polinômios, que também é outro assunto matemático importante.

Entretanto, a importância dos Números Complexos, e a relação com outros assuntos da Matemática, não se limita apenas ao “Teorema Fundamental da Álgebra” e suas consequências.

Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais ([LIMA, 1984](#), p. 3).

Outra consideração é se os Números Complexos é (ou não é) um assunto do Ensino Médio. Nesse sentido, o trabalho de [Correia e Santos \(2020\)](#), que descreve a apresentação do conteúdo dos Números Complexos em livros didáticos do Ensino Médio desde os anos 90, a partir da análise de livros didáticos de 1997, 2005 e 2016, mostra que esse conteúdo esteve presente no Ensino Médio.

Mas, os Números Complexos não estão na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ([BRASIL, 2017](#)). Não há qualquer menção a esse tema no documento, e nem são estabelecidas habilidades específicas relacionadas aos Números Complexos. Além disso, segundo [Menezes \(2021\)](#), esse assunto nunca foi objeto de uma questão do ENEM no

período de 2009 a 2019. Dessa forma, atualmente, os Números Complexos não é mais um tema tipicamente estudado no Ensino Médio.

É importante destacar que o conteúdo dos Números Complexos está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). No entanto, As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais determinou que o tema Números Complexos é opcional no currículo, apresentando a seguinte justificativa:

Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2007, p. 122).

Assim, até mesmo antes da BNCC, que excluiu o conteúdo de Números Complexos do Ensino Médio, já existia a concepção que esse tema poderia não ser ensinado na escola. Portanto, é oportuno ressaltar que as aulas sobre Números Complexos podem ser práticas, com uso de tecnologia e com qualquer metodologia de ensino e não se restringe apenas ao seu importante conceito abstrato.

Nesse sentido, [Dagostim e Pettres \(2016\)](#) apresentam dois exemplos de aulas práticas e diferenciadas com Números Complexos: o primeiro exemplo envolve a utilização do aplicativo *Geogebra*, enquanto o segundo aborda atividades que relacionam e aplicam Números Complexos no Circuitos RLC, proporcionando uma ilustração concreta da utilidade e importância dos Números Complexos.

O próximo conteúdo da Matemática Básica bastante utilizado na dedução, e que inclusive faz parte das soluções gerais, é a “função exponencial”. Destaque especial ao uso da característica de sua imagem ser sempre positiva quando ela é da forma: $y = a^x$. No entanto, uma observação importante é que essa propriedade é garantida pela ausência da soma de uma constante “ b ” na lei de formação da função exponencial, ou seja, considerando $y = a^x + b$, então a imagem pode incluir tanto o zero quanto os números reais negativos.

Esse estudo em relação as características da função exponencial é feito no Ensino Médio conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ([BRASIL, 2017](#)) e envolve a identificação do domínio e imagem, além de outras análises e relações conforme a Tabela 1.

Outro conteúdo utilizados na dedução foram as Função Seno e a Função Cosseno. Estes conteúdos são utilizados na fórmula de Euler que é um belo exemplo da relação de Números Complexos e Trigonometria. Inclusive, conforme [Carmo, Morgado e Wagner \(1992\)](#), as fórmulas de adição das funções trigonométricas podem ser obtidas através das propriedades dos Números Complexos. Dessa forma, o contexto da utilização foi algébrico e relacionado aos Números Complexos, e não limitado a trigonometria como normalmente é abordado na escola.

Conteúdo	Habilidade/ Competência	Descrição	Ano Escolar
Função Exponencial	COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.	1º ao 3º do EM
	(EM13MAT403)	Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	1º ao 3º do EM

Tabela 1 – Descrição das habilidades e competências da Função Exponencial.

Além disso, é importante ressaltar que a presença da Função Seno, Função Cosseno e as funções periódicas em geral nos fenômenos físicos e em outras áreas do conhecimento é por conta, conforme [Lima \(1984\)](#), delas serem o instrumento adequado para descrever os fenômenos periódicos. Assim, a utilização constatada neste trabalho não se trata de um caso isolado.

Ainda na trigonometria, destaca-se a Relação Fundamental da Trigonometria $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ utilizada no final do cálculo do determinante Wronskiano do caso 3 de Números Complexos. Assim, foi possível simplificar a expressão de maneira elegante e concluir que o Wronskiano é diferente de zero, pois, após a simplificação, o valor do determinante resultou em uma função exponencial. Assim, da mesma forma que as funções seno e cosseno foram utilizadas em um contexto algébrico, também ocorreu com a Relação Fundamental da Trigonometria sendo utilizada em um contexto não geométrico.

A Função Seno e a Função Cosseno estão presentes na BNCC de forma explícita na habilidade (EM13MAT306) conforme a Tabela 2. Por outro lado, a Relação Fundamental da Trigonometria está presente de forma implícita na mesma habilidade mencionada anteriormente, sendo essencial para a compreensão dos fenômenos periódicos no contexto do Ensino Médio e contribuindo para o desenvolvimento da proficiência na habilidade da BNCC (EM13MAT306).

Conteúdo	Habilidade/ Competência	Descrição	Ano Escolar
Função Seno e Função Cosseno	COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	1º ao 3º do EM
	(EM13MAT306)	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	1º ao 3º do EM

Tabela 2 – Descrição das habilidades e competências da Função Seno e Função Cosseno

O próximo tema a ter a sua utilização destacada é a Equação do 2º Grau. Ela foi muito utilizada na dedução da Solução Geral das EDOS Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes de 2ª ordem. Além disso, com o resultado encontrado na dedução, a resolução desse tipo de EDO se resume a resolver equações do 2º grau e substituir na Solução Geral do caso 1, 2 ou 3, sendo que a classificação dos casos também é dada pelo discriminante da equação.

Assim, destaca-se o uso, nesta pesquisa, da fórmula resolutiva da Equação do 2º Grau, com especial destaque ao discriminante da equação. Na BNCC, essa temática é vista em conjunto com os processos de fatoração algébrica, conforme Tabela 3. Nesse sentido, é oportuno abordar que também na dedução foram utilizados Fatoração por Fator Comum e Propriedades das potências de mesma base para simplificar as equações e EDOs. Dessa forma, as habilidades da BNCC relacionadas a esses temas, que mais se aproximam da forma como foram utilizados na dedução, estão juntas na Tabela 3. Outro conteúdo foram as frações que foram utilizadas para simplificar as soluções do caso 3, entretanto, a utilização foi breve e simples e por isso nenhuma habilidade da BNCC será destacada para esse conteúdo.

Conteúdo	Habilidade/ Competência	Descrição	Ano Escolar
Equação do 2º grau	(EF09MA09)	Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.	9º ano EF
Potências (Propriedades)	(EF08MA01)	Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.	8º ano EF
	(EF08MA02)	Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.	8º ano EF

Tabela 3 – Descrição das habilidades e competências da Equação do 2º grau, Fatoração e propriedades das potências

O último assunto a ser destacado é Determinantes. Este conteúdo foi utilizado no cálculo do Wronskiano que é um Determinante. Além disso, a álgebra linear tem uma forte presença na fundamentação teórica do estudo de EDOs e assim surge também os conteúdos de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

Na BNCC, assim como a relação fundamental da trigonometria, os Determinantes estão presentes de forma implícita. A habilidade associada é a mesma dos Sistemas Lineares, dessa forma eles já são estudados em um contexto mais concreto. A habilidade (EM13MAT301), relacionada aos Sistemas Lineares e Determinantes, está descrita na Tabela 4. Em geral, verificando os resultados, nota-se a existência de diversos conteúdos de Matemática Básica de forma integrada, ou seja, o uso foi feito de forma dinâmica e simultânea.

Um exemplo, nesse sentido, são as soluções $y(t) = e^{m_1 t}$ e $y(t) = e^{m_2 t}$ para o caso 1 da dedução feita anteriormente em 5.1. Ou seja, as duas soluções nestes casos são funções exponenciais em que as constantes m_1 e m_2 são determinadas pela resolução de uma equação auxiliar de segundo grau.

Outro exemplo, com uso ainda maior de conhecimentos da Matemática Básica ao mesmo tempo, é o caso 3 da mesma dedução. Tendo como soluções: $y(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $y(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$. Neste caso, a primeira solução é dada pela multiplicação da função seno com uma função exponencial de expoentes **reais** e a segunda solução

é a multiplicação da função cosseno com uma função exponencial de expoentes **reais**. Além disso, a constante α da exponencial e a constante β da função seno e cosseno são respectivamente a parte real e imaginária da solução da Equação de 2º Grau auxiliar.

Portanto, nota-se que o uso não foi dado de forma isolada e sim que esses conceitos foram aplicados de forma contínua. Dessa forma, embora principalmente na aplicação da fórmula tenhamos cálculos relativamente simples, por conta da quantidade de conteúdos envolvidos ao mesmo tempo, é necessário habilidade por parte do aluno para relacionar vários conteúdos que normalmente são abordados separados no Ensino Fundamental e Médio. Além disso, é essencial o estudante possuir a habilidade de utilizar esses conhecimentos de maneira abstrata, de forma a entender a linguagem matemática, por exemplo, da dedução 5.1 feita na pesquisa. Assim, o aluno estará mais preparado para aprender a Matemática e aplicá-la com habilidade no contexto concreto.

Logo, é necessário que o estudante desenvolva a capacidade de abstração em relação a esses temas, além da compreensão da linguagem matemática e de seus conceitos. Esse desenvolvimento torna-se mais acessível quando o aluno se depara não apenas com a Matemática em contextos práticos e concretos, que são fundamentais para a assimilação dos conceitos e a motivação do estudo, mas também de maneira abstrata e com maior grau de dificuldade. Essa abordagem permite que ele se familiarize com o grau mais elevado de complexidade exigido nas aplicações. Um exemplo dessa complexidade do conhecimento matemático nas aplicações foi ilustrado nesta pesquisa.

Conteúdo	Habilidade/ Competência	Descrição	Ano Escolar
Determinantes	COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	1º ao 3º do EM
	(EM13MAT301)	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	1º ao 3º do EM

Tabela 4 – Descrição das habilidades e competências dos Função Seno e Função Cosseno

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, é importante enfatizar novamente sobre a relação da Matemática com as outras áreas do conhecimento, especialmente com a Física. Nesse sentido, no segundo parágrafo do Capítulo 4, de acordo com Yartey e Ribeiro (2017, p. 8), foi apresentado que em muitas Leis Físicas são utilizados modelos matemáticos que envolvem a taxa de variação, ou seja, a derivada, de uma grandeza física. Assim, esses fenômenos físicos são descritos por equações com derivadas, denominadas de Equações Diferenciais.

Dessa forma, para se dar sentido prático as equações matemáticas obtidas através das leis físicas, é necessário, muitas das vezes, compreensão dessas leis ou de outros conhecimentos de outras áreas em que a Matemática se aplica. Assim, embora existam muitos exemplos elementares, conforme apresentado ao longo do trabalho, e seja possível contextualizar diversos conteúdos, é evidente que a maioria das aplicações, em especial as tecnológicas, só serão acessíveis a longo prazo.

Nesse sentido, esse trabalho teve o papel de ilustrar, por meio de um exemplo, como a Matemática está muito presente no nosso cotidiano, inclusive em aplicações tecnológicas e a importância da Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio nessas aplicações.

Além disso, neste trabalho, também se mostrou a necessidade dos estudantes desenvolverem habilidades de manipulação algébrica e domínio das propriedades operacionais das funções envolvidas. Nesta pesquisa, exemplificou-se como os estudantes precisam ter um domínio mínimo sobre diversos conteúdos da Matemática Básica.

Assim, nesta pesquisa além da necessidade de apresentação dos usos da matemática que implica em aplicações em outras áreas do conhecimento, tratado na introdução, fica evidenciado também a importância da exposição na escola de aplicações e relações entre os próprios conceitos matemáticos, além do potencial uso em diferentes contextos, de forma que o estudante esteja mais preparado para usar esses conhecimentos em contextos acadêmicos ou profissionais.

Neste trabalho, também foi destacada a importância e o uso de alguns conteúdos que, à primeira vista, podem parecer desprovidos de aplicações e inclusive essa foi uma das motivações do trabalho. Um exemplo notável é o dos Números Complexos, os quais muitos estudantes podem ter a impressão de serem úteis apenas para resolver os problemas sobre os próprios Números Complexos dos livros didáticos. No entanto, esses números têm uma ampla utilização na Física e Matemática. Da mesma forma, as funções trigonométricas e seu emprego em fenômenos periódicos representam outro exemplo de utilização em contextos distintos do habitual na escola.

De maneira geral, essas aplicações em outros contextos, incluindo os tecnológicos, envolvendo os Números Complexos, Funções Trigonométricas, Equação do Segundo Grau e outros conteúdos da Matemática Elementar são predominantemente acessíveis apenas em estudos avançados e específicos ou em ambientes profissionais altamente especializados. Assim, este trabalho é um exemplo do poder e a importância da Matemática Básica e também da presença da Matemática no dia a dia, que é muito maior do que se imagina. Isso fica evidente nesta pesquisa que destacou a Matemática do Ensino Fundamental e Médio utilizada nas EDOs relacionadas aos Circuitos RLC, os quais têm muitas aplicações no cotidiano.

Em relação à sugestão de outras pesquisas, a proposta realizada nesta pesquisa pode ser feita com outros diversos exemplos, inclusive substituindo a área de conhecimento de Matemática Básica para, por exemplo, Física do Ensino Médio. Outra abordagem interessante é o desenvolvimento de materiais didáticos do Ensino Fundamental e Médio com aplicações tecnológicas e suas devidas adaptações para que o aluno possa aplicar e compreender a aplicação de forma mais próxima de como é aplicado em outras etapas acadêmicas posteriores ou no futuro contexto profissional.

Referências

- ALVES, A. et al. O ensino de ressonância eletromagnética por um sistema emissor e receptor utilizando o rádio antena de quadro: descrição e análise usando osciloscópio. *Física na Escola*, v. 17, n. 1, p. 46–52, 2019. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/333786906>>. Acesso em: 26 mai. 2023.
- AMÂNCIO, F. V. *Motivações para o estudo da Matemática no Ensino Médio*. 2019. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade federal de São João del-Rei, São João del-Rei / MG, 2019. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7856043>. Acesso em: 18 jun. 2023.
- BARCELOS NETO, J. *Matemática para Físicos com Aplicações: Volume II - tratamentos clássico e quântico*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- BOYLESTAD, R. L. *Introdução à análise de circuitos*. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.
- BRASIL. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 2007. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 05 nov. 2019.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>>. Acesso em: 19 dez. 2019.
- BRASIL. Inep. *Sistema de Avaliação da Educação Básica: Evidências da edição 2017*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=94181-saeb-2017-versao-ministro-revfinal-1&category_slug=agosto-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 04 jun. 2023.
- BRASIL. Inep. *Escala de Proficiência do SAEB*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), 2020. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/resolveuid/48489792af314510ace5136a0ceddeca>>. Acesso em: 04 jun. 2023.
- BRASIL. Inep. *Press kit com informações essenciais sobre a aplicação e os resultados do exame*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), 2021. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/saeb/resultados/press_kit_saeb_2021.pdf>. Acesso em: 04 jun. 2023.
- CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria números complexos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992.
- CORREIA, N. d. S.; SANTOS, V. d. O. Números complexos em livros didáticos do ensino médio. *Anais do ENAPHEM-Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, v. 1, p. 1–5, 2020. Disponível em: <<https://>>

[//periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/download/11155/8059](http://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/download/11155/8059)>. Acesso em: 05 nov. 2023.

DAGOSTIM, G. M.; PETTRES, R. Números complexos: aplicação em circuitos RLC. *Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professo PDE*, v. 1, 2016. Disponível em: <https://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_ufpr_gilbertomartinsdagostim.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2023.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática e Matemática Humanista*. YouTube, 08 de set. de 2020. Postado no canal "Semana Acadêmica Matemática 2020". Palestra acadêmica da XXXIV edição da Semana Acadêmica de Matemática do Curso de Matemática da Unioeste/Campus Cascavel, 2020. Disponível em: <<https://www.youtube.com/live/hZwjoK-KNRc?feature=share>>. Acesso em: 18 jun. 2023.

FAVI, J. L. A. *Conversor ressonante para aplicação biomédica em eletrocirurgia*. 2018. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira - SP, 2018. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/166399>>. Acesso em: 01 maio 2023.

FROTA, M. C. R. Sintetizar idéias e atribuir sentido às fórmulas para aprender cálculo. *Anais do XXXV Cobenge*, 2017. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/12/artigos/83-Maria%20Clara%20Rezende%20Frota.pdf>>. Acesso em: 04 jun. 2023.

LIMA, E. L. Sobre a evolução de algumas idéias matemáticas. *Revista do Professor de Matemática*, v. 06, 1984. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/6/1rpm.htm>>. Acesso em: 25 nov. 2023.

MARTINS, R. *Isto é Matemática T01E02 - Como é que o google googla*. YouTube, 22 de out. de 2012. Postado no canal "sigma3web". Promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática. Portugal, 2012. Disponível em: <<https://youtu.be/DZ0hq2sQg28>>. Acesso em: 18 jun. 2023.

MENEZES, S. B. de. *Uma análise dos conteúdos de matemática em desuso nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)*. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, JOÃO PESSOA – PB, 2021. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/21470>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.

NUNES, L. A. de O. *Aplicações de Circuitos Ressonantes (RLC)*. YouTube, 26 de jul. de 2018. Postado no canal "Oficiencia". Realização de Prove (Produção de Vídeos Educacionais, Instituto de Física de São Carlos – USP). São Carlos - SP, 2018. Disponível em: <<https://youtu.be/1Mdtk55FeA>>. Acesso em: 20 maio 2023.

SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica: A questão da democracia*. Campinas: Papirus Editora, Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 2001.

SOUZA, F. M. S. E. *Transformada de Laplace em circuitos elétricos RLC*. 52 f. Monografia (trabalho de conclusão do curso de bacharelado em Ciências Exatas e Tecnológicas) — Universidade federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas - BA, 2017. Disponível em: <<https://www2.ufrb.edu.br/bcet/tcc/biblioteca-digital>>. Acesso em: 18 jun. 2023.

SOUZA, L. R. O. de. *Análise dos Desfibriladores de um Estabelecimento Assistencial de Saúde*. 2012. 98 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Biomédica, Faculdade Gama, Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2012. Disponível em: <<https://repositorio.unb.br/handle/10482/12561>>. Acesso em: 01 maio 2023.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. *Equações diferenciais*. Salvador: UFBA (Universidade Federal da Bahia), Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação à Distância, 2017. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/retrieve/166324/eBook_Equacoes_Diferenciais-Licenciatura_Matematica_UFBA.pdf>. Acesso em: 26 mar. 2023.

ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicação em modelagem*. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2007. v. 1.