

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS

CAMPUS PALMAS

CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GUSTAVO DE ASSIS SOUSA

**EXPLORANDO AS TRILHAS DE APRENDIZADO NO ENSINO DE
INTEGRAL DE LINHA**

PALMAS

2023

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS

GUSTAVO DE ASSIS SOUSA

**EXPLORANDO AS TRILHAS DE APRENDIZADO NO ENSINO DE
INTEGRAL DE LINHA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal do Tocantins
– Campus Palmas, como exigência à obten-
ção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wallysonn Alves de
Souza

PALMAS

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

S725e Sousa, Gustavo de Assis
 Explorando as Trilhas de Aprendizado no ensino de Integral de Linha /
 Gustavo de Assis Sousa. – Palmas, TO, 2023.
 70 f. : il. color.

 Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus
 Palmas, Palmas, TO, 2023.

 Orientador: Dr. Wallysonn Alves de Souza

 1. Trilhas de aprendizagem. 2. Integral de linha. 3. Teorema de Green. I.
 Souza, Wallysonn Alves de. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).



Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
CAMPUS PALMAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**FOLHA DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO
DE CURSO DE GRADUAÇÃO**

1. **TÍTULO:** EXPLORANDO AS TRILHAS DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE INTEGRAL DE LINHA
2. **AUTOR:** GUSTAVO DE ASSIS SOUSA
3. **ORIENTADOR:** Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, *campus* Palmas, como parte das exigências para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 19/06/2023.

Prof. Doutor Wallysonn Alves de Souza
IFTO – Campus Palmas
Presidente/Orientador

Prof. Me. Magno Márcio de Azevedo
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 1

Prof. Me. Edson Luiz Kraemer
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 2



Documento assinado eletronicamente por **Wallysonn Alves de Souza, Servidor**, em 27/06/2023, às 20:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Magno Marcio de Azevedo, Servidor**, em 27/06/2023, às 20:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Luiz Kraemer, Coordenador**, em 29/06/2023, às 08:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.iftto.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2029943** e o código CRC **8FBBE916**.

Quadra 310 Sul, Lo 5, s/n, esquina com a Avenida NS 10 - Plano Diretor Sul — CEP 77.021-090
Palmas/TO — (63) 3236-4000
portal.iftto.edu.br — reitoria@iftto.edu.br

Aos meus avós Salustriana Alves de Assis e Clotildes Bruno de Assis.
Aos meus irmãos Thiago Alves de Assis e Geovanna Alves de Assis.

Agradecimentos

- Aos meus avós, por sempre acreditarem em mim;
- Aos meus irmãos, por estarem sempre comigo;
- Ao meu orientador, Professor Dr. Wallysonn Alves de Souza, pelas suas contribuições, paciência e confiança;
- Aos professores do curso de licenciatura em matemática do IFTO, pelas contribuições na minha formação;
- Aos meus amigos Laura Cristina e Wellington Veloso.
- À todos que contribuíram para minha formação profissional e pessoal.

MUITO OBRIGADO!

Resumo

Este estudo aborda a necessidade de adaptação das estratégias de ensino diante das constantes mudanças na educação. A pandemia da Covid-19 impulsionou o ensino remoto e híbrido, exigindo dos professores o rápido aprendizado diante das Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação (TDICs). No entanto, muitas vezes essas tecnologias foram utilizadas limitadamente, priorizando a transmissão de informações. Os alunos também enfrentaram desafios ao se adaptarem a essas novas modalidades. Se, até mesmo antes de toda a reformulação que foi necessária na educação diante das circunstâncias dos últimos anos, os alunos apresentavam dificuldades que os acompanhavam desde as séries iniciais, diante de toda a responsabilidade e autonomia que lhes foi atribuída no ensino remoto, o processo de ensino-aprendizagem apresentou pontos críticos. Assim o uso adequado de metodologias como trilhas de aprendizagem integram o processo de ensino-aprendizagem em qualquer situação, oferecendo vantagens como acompanhamento da evolução dos alunos e personalização do ensino. As trilhas de aprendizagem, originalmente desenvolvidas no contexto empresarial, aplicam-se no ensino superior para superar as limitações do ensino remoto durante a pandemia. Elas permitem aplicar diferentes metodologias ativas, ampliando o leque de ferramentas que podem contribuir para um melhor entendimento dos conteúdos. Assim, este trabalho propõe uma trilha de aprendizagem que contribui para o ensino de integral de linha e teorema de Green, visto que as taxas de reprovação nas disciplinas de cálculo são altas assim como as dificuldades e a diferença de nível existente entre os alunos.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem; tecnologias digitais de comunicação e informação; trilhas de aprendizagem; integral de linha.

Abstract

This study addresses the need for adaptation of teaching strategies in the face of constant changes in education. The Covid-19 pandemic has driven remote and hybrid learning, requiring teachers to quickly learn about Digital Communication and Information Technologies (DCITs). However, these technologies were often used in a limited manner, prioritizing the transmission of information. Students also faced challenges in adapting to these new modalities. Even before the educational overhaul that was necessary due to the circumstances of recent years, students already had difficulties that persisted from the early grades. Given the responsibility and autonomy assigned to them in remote learning, the teaching and learning process presented critical points. Therefore, the appropriate use of methodologies such as learning paths integrates the teaching and learning process in any situation, offering advantages such as monitoring student progress and personalized instruction. Learning paths, originally developed in the business context, are applied in higher education to overcome the limitations of remote learning during the pandemic. They allow for the implementation of different active methodologies, expanding the range of tools that can contribute to a better understanding of the content. Thus, this work proposes a learning path that contributes to the teaching of line integrals and Green's theorem, considering the high failure rates in calculus courses as well as the difficulties and existing differences in the students' level.

Keywords: Teaching and learning; Digital communication and information technologies; Learning paths; Line integral.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Partição da curva C	21
Figura 2 – Aproximação da curva C por segmentos de reta.	21
Figura 3 – Variação do comprimento do arco $\widehat{P_{k-1}P_k}$	22
Figura 4 – Trajetória da asa-delta.	25
Figura 5 – Curva C parametrizada no intervalo $I = [a, b]$	26
Figura 6 – Curva C através da função f	27
Figura 7 – Partição do intervalo $I = [a, b]$	28
Figura 8 – Partição da curva C através da partição de $I = [a, b]$	28
Figura 9 – “Altura” de f em relação ao plano xy	28
Figura 10 – Reta — exemplo 3	32
Figura 11 – Gráfico exemplo 4	33
Figura 12 – Campo vetorial bidimensional.	36
Figura 13 – Campo vetorial tridimensional.	37
Figura 14 – Partição do intervalo $I = [a, b]$	39
Figura 15 – Partição da curva C através da partição de $I = [a, b]$	39
Figura 16 – Movimento da partícula sob ação de um campo vetorial.	40
Figura 17 – Gráfico função do segundo grau.	42
Figura 18 – Segmento de reta unido com arco de circunferência do 1º quadrante.	43
Figura 19 – Curva espacial com ação de um campo vetorial.	46
Figura 20 – Exemplo de circulação no bordo do redemoinho em um rio.	47
Figura 21 – Componente tangencial unitário da circulação.	50
Figura 22 – Exemplo de curva situada em um rio.	50
Figura 23 – Representação gráfica dos casos do vetor normal dado por $T \times k$ ou $k \times T$	51
Figura 24 – Região do Tipo I	56
Figura 25 – Região do Tipo II	57
Figura 26 – Demonstração — teorema de Green (região — tipo I)	58
Figura 27 – Demonstração — teorema de Green (região — tipo II)	59
Figura 28 – Gráfico exemplo 10	61
Figura 29 – Gráfico exemplo 11	62
Figura 30 – Gráfico exemplo 11 (corte)	63
Figura 31 – Gráfico exemplo 12	65
Figura 32 – Gráfico exemplo 13	66

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	Aspectos motivadores da proposta	13
2.2	Conceituação teórica acerca do tema	14
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	19
4	INTEGRAL DE LINHA	20
4.1	Integral de linha de primeira espécie: contextualização e definição no plano e no espaço.	26
4.1.1	Exercícios Propostos	35
4.2	Integral de Linha de campos vetoriais	36
4.2.1	Exercícios Propostos	45
4.3	Integrais de escoamento e circulação para campos de velocidade . .	46
4.3.1	Exercícios Propostos	49
4.4	Fluxo através uma curva plana simples	49
4.4.1	Exercícios Propostos	54
5	TEOREMA DE GREEN	55
5.0.1	Exercícios propostos	67
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
	REFERÊNCIAS	70

1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem está em constante evolução, demandando adaptações às diferentes circunstâncias e metodologias utilizadas. A educação tem passado por transformações significativas, da mesma forma que toda a sociedade. A pandemia da Covid-19 impulsionou ainda mais o uso do ensino remoto e híbrido, o que exigiu que professores e alunos se adaptassem aos novos desafios. Os educadores tiveram que rapidamente se familiarizar com as Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação (TDICs) e os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) para garantir o apoio aos alunos. No entanto, em muitos casos, as estratégias de ensino adotadas foram limitadas, reduzindo a qualidade do ensino e aumentando ainda mais a defasagem.

Os alunos também enfrentaram a necessidade de se adaptar às novas modalidades e metodologias de ensino de forma emergencial. Apesar de que mesmo antes da pandemia, as TDICs já estavam presentes na sociedade, trazendo mudanças nas formas de ensino e aprendizagem. A falta de uma estrutura adequada e a qualidade do processo de ensino-aprendizagem tornaram-se desafios evidentes, da mesma forma que a responsabilidade e autonomia que foram atribuídos aos estudantes nesse processo. Mesmo na educação tradicional, em que os alunos estão fisicamente presentes na sala de aula e sob a supervisão do professor, ainda existem dificuldades de aprendizagem decorrentes de diferentes níveis de conhecimento, ritmos de aprendizado e, infelizmente na maioria das vezes, desinteresse.

No contexto do ensino remoto, esses problemas são agravados pela distância física e pela maior liberdade concedida aos alunos. Por isso, é fundamental explorar estratégias e ferramentas que possam superar essas dificuldades. As tecnologias digitais têm se tornado cada vez mais relevantes no ensino de disciplinas como matemática e física. O uso de ferramentas digitais, como softwares educacionais matemáticos e Ambientes Virtuais de Aprendizagem, juntamente com metodologias ativas, como a sala de aula invertida, têm sido adotados pelos professores para integrar o ensino remoto e híbrido, bem como em um contexto pós-pandêmico.

Então, diante da realidade que os professores e os cursos de exatas enfrentam para os seus alunos terem êxito em sua vida acadêmica, surge a necessidade do desenvolvimento de estratégias e métodos que minimizem os prejuízos nas áreas que impedem esse objetivo de ser alcançado. Neste sentido, a pergunta norteadora deste trabalho é: como que uma trilha de aprendizagem, pode contribuir para a melhoria do ensino de integral de linha nos cursos das áreas de exatas?

As trilhas de aprendizagem surgem como uma estratégia promissora no ensino de disciplinas como cálculo, proporcionando aos alunos um aprendizado mais aprofundado e

organizado. Essas trilhas permitem que o aluno siga um percurso estruturado desenvolvido pelo professor, estimulando a reflexão, o questionamento e a discussão dos conceitos de forma assíncrona, respeitando o seu ritmo e conhecimento. Além disso, permitem que o professor personalize o ensino, desperte a curiosidade e faça conexões com a realidade dos alunos. Os professores podem disponibilizar essas trilhas por meio de plataformas online, permitindo que os alunos acessem os conteúdos a qualquer momento e em qualquer lugar, proporcionando continuidade do processo educacional, os orientando e conduzindo no processo mesmo em situações adversas. É de grande importância destacar esse acompanhamento dos professores, eles desempenham um papel fundamental na seleção/criação e adaptação das trilhas, no fornecimento de suporte aos alunos.

Assim, o presente trabalho propõe o uso das trilhas de aprendizagem como uma ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem, com ênfase na superação das dificuldades enfrentadas devido a lacunas no aprendizado matemático desde o ensino básico. Serão explorados os benefícios dessas trilhas de aprendizagem no contexto do ensino remoto e híbrido, assim como em um cenário pós-pandêmico, para o ensino de integral de linha. O objetivo é construir uma trilha de aprendizagem para o ensino de integral de linha, com formulações de teoremas, definições, exemplos e aplicações, proporcionando aos estudantes a possibilidade de enxergar a dinâmica do cálculo vetorial com outros olhos, instigando-os quanto a origem, demonstração e aplicações.

A trilha contará com explicações analíticas e gráficas, sobre integral de linha e teorema de Green. Serão abordados também conceitos acerca de cada tema principal, tanto os com ligação direta quanto os com ligação indireta, isto é, aquilo que for necessário para o entendimento do objeto em estudo, isso para evitar ao máximo que o leitor prossiga sem compreender bem cada conteúdo. Serão trabalhados detalhadamente com o passo a passo das demonstrações das equações envolvidas. Além disso, exemplos resolvidos e ao final exercícios propostos para a reflexão do aluno complementarão o estudo.

Para tal, este trabalho está organizado da seguinte forma: inicialmente, no Capítulo 2, apresentamos a fundamentação teórica que trará o embasamento teórico que corrobora com o tema escolhido. No Capítulo 3 trataremos sobre a metodologia utilizada. No Capítulo 4 exploraremos o conceito de integral de linha e algumas de suas interpretações e aplicações. No Capítulo 5 abordaremos o teorema de Green e sua relação com a integral de linha e suas interpretações. E, por fim, no Capítulo 6 finalizaremos este trabalho com as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Aspectos motivadores da proposta

O ensino superior, por si só, já é marcado por um grau elevado de dificuldade em todas as áreas de estudo, mas ao considerar as áreas de exatas, nos deparamos com altos índices de reprovação e evasão em disciplinas como, por exemplo, Cálculo Diferencial e Integral. Podemos perceber isso quando vemos os resultados de uma pesquisa feita na Universidade Federal de Campina Grande, Campus Cuité. Que teve como objetivo justamente investigar e analisar, durante dois anos (2016 e 2017), os índices de reprovação e evasão na disciplina de cálculo diferencial e integral I, ofertada para os cursos de Licenciatura em Física, Química e Matemática. De acordo com NASCIMENTO et al. (2018) ,

é notório os altos índices de reprovação, seja por nota ou por falta, nos semestres de 2017.1 e 2017.2. No entanto, estes números foram ainda mais altos, como, por exemplo, em 2017.1, a turma 01 com um total de 33 alunos matriculados, 63,6% foram reprovados por nota e 27,3% por falta. No período seguinte, 2017.2, onde se tinha um total de quatro turmas, o maior índice de reprovação deu-se na turma 02, na qual 44 alunos foram matriculados na disciplina, mas apenas 34.1% conseguiram aprovação, 43,2% foram reprovados por nota e 18,2% reprovados por falta.

Altos índices que representam a realidade de muitas outras universidades, que por diversos motivos como problemas dos estudantes com a matemática básica desde o início da formação acadêmica fundamental até o ingresso nos cursos de graduação — motivos esses que não são o foco principal do presente trabalho.

As dificuldades dos estudantes e os altos índices de reprovação e evasão como os apresentados não cessam após a aprovação em cálculo I, pelo contrário, a tendência é manter e até mesmo piorar com o avanço dos tópicos desta disciplina. Não é por acaso que é comum em turmas de cálculo III e IV encontrar poucos alunos cursando e entre estes, ainda tem aqueles que estão fazendo pela segunda ou terceira vez, por exemplo. Em partes, isso se deve à metodologia utilizada para ensinar. Metodologias que apenas estimulam a capacidade dos estudantes de memorizar diversas fórmulas e resultados, que reforçam a prática excessiva, repetitiva e descontextualizada de exercícios como promessa de sucesso e aprovação, têm como resultado ótimas “máquinas” de derivar e integrar, mas com péssima capacidade de interpretação, visualização e aplicação dos conteúdos mais avançados.

É aqui que entra o uso TDICs como um recurso pedagógico. Tendo em vista o nível elevado de abstração e exigência por uma base matemática bem construída que

as disciplinas de cálculo exigem, explicando, em parte, as elevadas taxas de reprovação e desistência. As Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação (TDICs) atuam auxiliando o professor no desenvolvimento de uma metodologia com uso das trilhas de aprendizagem, com o poder de conduzir o aluno em uma sequência que proporcione uma interação e um maior estímulo com o que está sendo ensinado. HALLAL et al. (2020, p. 230) destaca que

o uso dessas ferramentas pode viabilizar a construção do conhecimento, de maneira autônoma e independente. Assim, trabalhar a Matemática com as representações gráficas e/ou algébricas. Desse modo, pode minimizar o baixo nível de abstração dos alunos sobre os conceitos presentes na disciplina.

Dessa forma, desenvolvemos uma trilha de aprendizagem baseada na construção e explicação de todo o conteúdo na própria trilha — no conteúdo que nos propomos a trabalhar, ou seja, Integral de Linha, e também daqueles que conceitos periféricos que são a compreensão do todo — que possa fazer com que essas dificuldades sejam atenuadas. De acordo com Duval (2009) é preciso existir uma relação entre objeto matemático e as diversas formas de registro existentes, e, ao mesmo tempo, uma distinção para que o objeto não seja confundido com sua representação. Pois, conforme o autor, sem essa conceituação não é possível haver compreensão matemática. Ele define objeto matemático aquilo que se aprende nas aulas de matemática, ou seja, os tópicos e assuntos da matemática (conceitos, teoremas, etc.), já o registro é definido como sendo as formas que esse objeto matemático é apresentado (registro algébrico, registro numérico, registro gráfico, etc.). E, para que a compreensão de um estudante a respeito de certo assunto seja completa, ele precisa ser capaz de “caminhar” entre e por meio dos registros, mantendo o mesmo objeto.

2.2 Conceituação teórica acerca do tema

O processo de ensino-aprendizagem exige adaptação às circunstâncias e metodologias de ensino utilizadas. Sendo a educação um fenômeno em constante evolução, assim como outras práticas da nossa sociedade, é evidente que as estratégias de ensino também sejam mudadas ao longo do tempo e que estas adaptações devem ser promovidas pelos próprios docentes para que estratégias de ensino mais efetivas sejam postas em prática.

A pandemia da Covid-19 deu um grande impulso no que diz respeito ao ensino remoto e ao ensino híbrido, fazendo com que tanto professores quanto os alunos tivessem que se reinventar nos seus papéis. Os professores tendo que de um dia para outro aprender a lidar com as Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação (TDICs) e com os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) para que seus alunos não ficassem desamparados. Diante da urgência muitas das vezes “[...] transferindo e transpondo metodologias e práticas pedagógicas típicas dos territórios físicos de aprendizagem [...]”

(MOREIRA; HENRIQUES; BARROS, 2020) para o cenário remoto, o que resultou no uso das tecnologias de forma “[...] meramente instrumental, reduzindo as metodologias e as práticas a um ensino apenas transmissivo [...]” (MOREIRA; HENRIQUES; BARROS, 2020).

Da mesma forma os alunos tendo que se adaptar com essas novas modalidades e metodologias de ensino, tudo isso de forma emergencial. Apesar dessas tecnologias não serem um produto da pandemia “desde que as TDIC começaram a se expandir pela sociedade, aconteceram muitas mudanças nas maneiras de ensinar e aprender” (KENSKI, 2003), sobretudo nesse período enfrentado pela sociedade.

Muitas variáveis influenciaram nos erros e acertos cometidos na tentativa de pôr em prática metodologias que atendessem os alunos que estavam de suas casas acompanhando o semestre letivo, os desafios foram muitos, como destaca Martins (2020, p. 251) ao citar as preocupações com as condições de trabalho do docente, pois nem todas as instituições forneceram ou sequer possuíam, ou tinham condições de oferecer aparato para subsidiar o ensino nessa modalidade, cabendo aos próprios professores a tarefa de serem criativos, ela destaca também “[...] a qualidade do processo de ensino-aprendizagem, a relevância e o significado dos temas a serem abordados, o desenvolvimento de práticas pedagógicas centradas no estudante [...]”.

São nessas preocupações destacadas por Martins que se encontra um dos pontos mais críticos dessas modalidades de ensino: a responsabilidade e a autonomia dos estudantes diante do processo de aprendizagem e qualidade desse ensino, conforme aponta (MORAES et al., 2019).

Se, por um lado na educação tradicional os estudantes estão em uma sala de aula presencial sob a atenção do professor, com um tempo determinado por aula, para um certo conteúdo a ser ministrado baseado em metodologias validadas e com espaço para o esclarecimento e debate de dúvidas, ainda assim nem todos os alunos aprendem por igual, pois nem todos estão no mesmo nível, nem todos aprendem no mesmo ritmo, além disso, muitos não se interessam em aprender. Pelo outro lado, temos praticamente os mesmos problemas, mas agravados pela distância e liberdade concedida ao estudante quando ele não está em um ambiente controlado.

Conforme Silva (2019), é notório a importância do uso das tecnologias digitais a cada dia que passa, uma vez que computadores, laptops e smartphones são utensílios considerados indispensáveis e usados diariamente pela maioria das pessoas. MALTEMPI e MENDES (2016) corroboram à afirmação de da Silva e afirmam que o uso das tecnologias digitais em sala de aula é “ser coerente com o tempo em que vivemos” (MALTEMPI; MENDES, 2016).

Nota-se, assim, que o uso de ferramentais digitais e metodologias adequadas a

essa forma de ensino, ganham força em todas as áreas do conhecimento, principalmente naquelas no qual os alunos historicamente apresentam mais dificuldades, como a matemática e a física, desde conceitos mais básicos até os mais avançados e, inclusive, os de Cálculo.

Nesse sentido, ferramentas digitais como os softwares educacionais matemáticos (por exemplo, GeoGebra, régua e compasso), os Ambiente Virtuais de Aprendizagem e metodologias ativas como sala de aula invertida apoiada em sequências didáticas e trilhas de aprendizagem se tornam alvos dos professores como meios para integrar o processo de ensino remoto, e até mesmo no ensino presencial já em um novo contexto pós-pandêmico que a sociedade está passando, onde, segundo Avelino e Mendes (2020) as TDICs podem e estão sendo adaptadas para ocupar um espaço significativo na volta à normalidade da sociedade. Pois todos os mecanismos educacionais digitais desenvolvidos e/ou aprimorados e que foram fortemente usados durante a pandemia estão disponíveis para o uso fornecendo muitas vantagens como o acompanhamento da evolução dos alunos nas atividades propostas, transmissão de informações, utilização de recursos computacionais, personalização do ensino entre outras.

De acordo com Bacich e Moran (2018, p. 2) “aprendemos quando alguém mais experiente nos fala e aprendemos quando descobrimos a partir de um envolvimento mais direto por questionamento e experimentação”. O interesse e o envolvimento dos alunos é a parte difícil do processo, no próprio ensino tradicional presencial uma aula expositiva de 50 minutos, onde o professor muitas vezes lê o slide com o conteúdo tirado de um livro com uma linguagem extremamente técnica que logo de início mais afasta os alunos do que ganha sua atenção, principalmente em disciplinas de exatas que exigem uma bagagem e conhecimento prévio para o acompanhamento dos conceitos (especialmente os de cálculo), no ensino remoto estratégias como esse tendem a ser ainda menos produtivas. Tudo isso aliado ao que já foi citado anteriormente quanto ao ritmo de cada aluno, deixa o processo de ensino-aprendizagem mais lento e defasado, exigindo uma mudança na prática docente para amenizar as dificuldades. Mas, tendo em vista tudo o que já foi abordado até aqui, vale chamar atenção para o que Valente et al. (2020) diz a respeito do mundo educacional pós-pandemia e da visão da TDIC,

Os desafios continuam e são inúmeros, mas certamente, a educação e o mundo pós-pandemia não serão mais os mesmos. A visão das TDIC como soluções salvacionistas para os dilemas da educação está longe de ser correta, mas elas podem indicar caminhos possíveis para práticas mais integrativas e colaborativas e relações mais horizontais entre professores e alunos no Ensino Superior – tanto neste momento pandêmico, como quando tudo passar e iniciarmos o que muitos vêm chamando de “novo normal”

No sentido de munir os professores, principalmente os da área de exatas, com ferramentas que possam os auxiliar no contexto em que estão inseridos de ensino remoto,

híbrido, presencial, EAD ou qualquer que seja, a trilha de aprendizagem se destaca como uma excelente estratégia no ensino e suplementação de conceitos da área de cálculo durante as aulas desta disciplina.

Por representarem uma opção onde, a partir das construções e da sequência utilizada, pode proporcionar ao aluno um aprendizado potencializado, se considerarmos uma trilha bem estruturada e completa. Ao ser disponibilizada para os alunos como uma atividade assíncrona ou como um complemento ou até mesmo texto para base estudos e posteriores debates e discussões sobre os conceitos, a trilha dá a oportunidade do aluno segui-la em seu tempo, levando-o a reflexões, dúvidas, questionamentos que caso fujam do que foi proposto na própria trilha, pode ser discutido em momento posterior com o professor e colegas.

Oportuniza também ao aluno assumir responsabilidade em seu aprendizado, respeitando seus limites de tempo e conhecimento, assim a trilha fornece uma flexibilização e uma personalização do ensino, cabe ao professor saber conduzir a trilha de forma que chame a atenção do aluno e o estimule a continuar, que desperte sua curiosidade em entender o porquê, como se dá a construção do conhecimento, é também a chance de o professor levar uma visão/linguagem diferente, contextualizada, “traduzida” dos termos técnicos, o que até pode ser feita em uma aula presencial, mas com variáveis como o tempo, distrações, capacidade de conseguir se comunicar diretamente com o aluno conectando-o com o que está sendo falado. Outro importante benefício está no nivelamento do conhecimento, isto é, diminui os atrasos entre os estudantes realizando assim os momentos de encontro muito mais proveitosos para todos.

Embora as trilhas de aprendizagem tenham surgido no ambiente corporativo, como um instrumento metodológico para a capacitação e o aperfeiçoamento profissional sem a rigidez e a inflexibilidade dos programas tradicionais de treinamento, foi sob a análise dos seus benefícios que essa metodologia foi muito aplicada nas Instituições de Ensino Superior (IES) objetivando diminuir as dificuldades encontradas no ensino remoto durante a pandemia, tanto no tocante a falta de estrutura e ao caráter emergencial quanto, principalmente, as limitações de cada aluno.

As muitas possibilidades com as trilhas de aprendizagem não se restringem a um único contexto, da mesma forma que não ficou limitada apenas ao ambiente empresarial, no cenário educacional da IES, as trilhas não se limitam apenas ao ensino remoto tampouco a uma única metodologia utilizada para sua construção. Através dessa ferramenta, metodologias ativas como sala de aula invertida, aprendizado por pares, por problemas, gamificação entre outras podem ser aplicadas, tudo dependerá do que o professor deseja propor aos alunos. Dessa forma, é necessário que o professor tenha clareza nos seus objetivos e nos resultados que se espera dos alunos ao final da trilha, escolha bem o conhecimento que deseja transmitir e, se possível, conheça o perfil dos alunos para que diferentes níveis de

dificuldades sejam abordados.

Portanto, diante de tudo que foi apresentado, pode-se destacar que as trilhas de aprendizagem são ferramentas facilitadoras do processo de ensino-aprendizagem por permitir aos docentes e aos alunos um maior entendimento acerca da maneira com que se relacionam os conteúdos a serem abordados na matéria e uma compreensão mais profunda dos conceitos e aplicações estudadas.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho, por se tratar de uma trilha de aprendizagem para o ensino de cálculo vetorial, se caracteriza, quanto a natureza, como uma pesquisa aplicada que pode ser usada por todo e qualquer professor que possa se interessar pela metodologia. O resultado será obtido a partir de uma pesquisa explicativa e de abordagem qualitativa, tendo como procedimento o experimento, uma vez que foi definido o objeto de estudo e será apresentado um produto oriundo de uma construção que visa melhorar as aulas e o aprendizado dos alunos.

Este trabalho será dividido em seções onde cada uma contará com a sistematização de uma parte do conteúdo. Serão duas seções principais, uma para Integral de Linha e outra para o Teorema de Green, onde ambas darão origem a outras subseções que formarão uma sequência didática em forma de trilha.

Cada assunto apresentado nas seções e subseções será seguido de uma explicação teórica, uma demonstração analítica apoiada por imagens que ilustram a situação, imagens que poderão ser proporcionadas por desenhos a mão elaborados pelo autor e/ou pelo GeoGebra. Em seguida, serão apresentados exemplos resolvidos e comentados, e por fim serão propostos exercícios que irão avaliar o entendimento dos estudantes e a capacidade de interpretação e assimilação dos conteúdos diante de uma situação muitas vezes contextualizada.

4 INTEGRAL DE LINHA

Esta trilha buscará fazer uma aproximação entre o conteúdo proposto e a realidade de muito estudantes que possuem dificuldades em matemática, tentaremos “traduzir” de forma simples e prática cada definição, teorema, exercícios e conteúdos secundários necessários em certos momentos. Essa é uma proposta que entregará um material de fácil entendimento, completo e fechado, para que aquele que seguir possa ter o entendimento sobre os conteúdos sem ter tanta necessidade de buscar muitas fontes externas para complementar o estudo. Em contrapartida, não será deixado de lado o rigor matemático que se espera e que será exigido em atividades, provas e trabalhos fora do contexto dessa trilha. Para podermos cumprir com a proposta, seguiremos como base livros de cálculo de autores renomados, como George B. Thomas e James Stewart, a todo momento apresentando a sequência e a formalidade do conteúdo juntamente com nossa visão e explanação.

Antes de iniciarmos propriamente com o objeto de estudo deste trabalho, sendo as Integrais de Linha e o Teorema de Green, relembremos o conceito de comprimento de arco, essencial para as construções e para compreensão acerca desses assuntos.

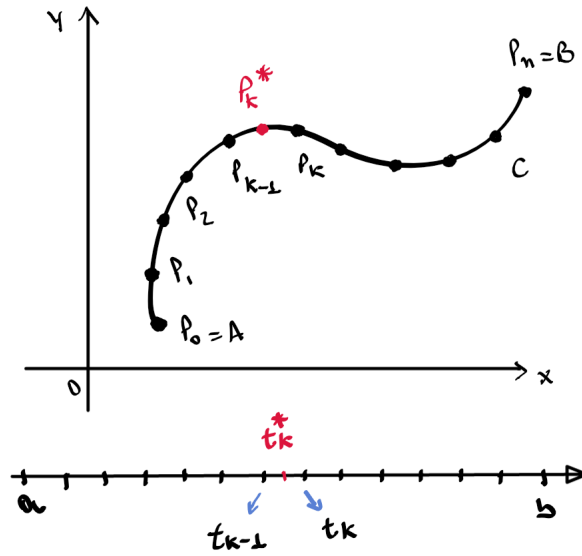
Quando trabalhamos com uma curva que é parametrizada, podemos trabalhar em cada uma das definições e encontrar uma expressão para o comprimento L de uma curva C análoga ao de uma curva dada na forma cartesiana $y = f(x)$, com $a \leq x \leq b$, sendo expressa por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Seja C uma curva dada pelas equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, isto é, $C : r(t) = (f(t), g(t))$ com $a \leq t \leq b$, ou, de forma equivalente, descrita pela equação vetorial $r(t) = f(t)i + g(t)j$ com $a \leq t \leq b$.

Desde já, devemos assumir que as funções f e g sejam continuamente deriváveis, isto é, f , g , $f'(t)$ e $g'(t)$ são contínuas em seu domínio. Além disso, exigiremos que $f'(t)$ e $g'(t)$ não sejam iguais a zero ao mesmo tempo, isso para garantir que C seja uma curva lisa, ou seja, não apresenta mudanças bruscas de direção ou “bicos” em seu gráfico.

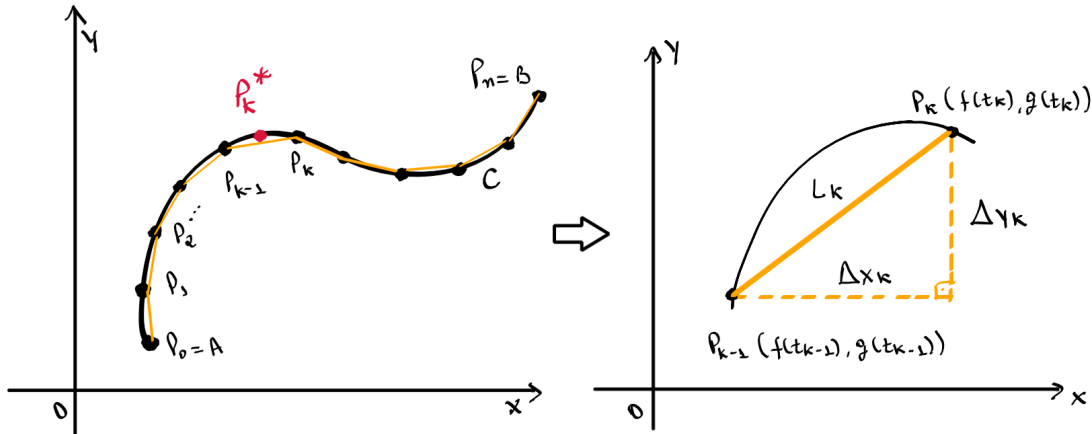
No intervalo $I = [a, b]$ faremos uma divisão em n sub-intervalos de comprimentos iguais a Δt . Como cada t_k , $0 \leq k \leq n$ é extremidade de um subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, temos que $x_k = f(t_k)$ e $y_k = g(t_k)$ que formam os pontos $P_k = (f(t_k), g(t_k))$ pertencentes a C também dividem C em n subarcos de extremidades P_k , $0 \leq k \leq n$ sendo $A = P_0 = (f(t_0), g(t_0))$, $P_1, P_2, \dots, P_n = B = (f(t_n), g(t_n))$, como pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 – Partição da curva C .

Fonte: Autor (2023).

Podemos perceber na Figura 2 que a curva C pode ser aproximada pela união de cada um desses segmentos de reta $\overline{P_{k-1}P_k}$, da mesma forma seu comprimento pode ser aproximado pela soma do comprimento de cada um dos segmentos $\overline{P_{k-1}P_k}$ dado por:

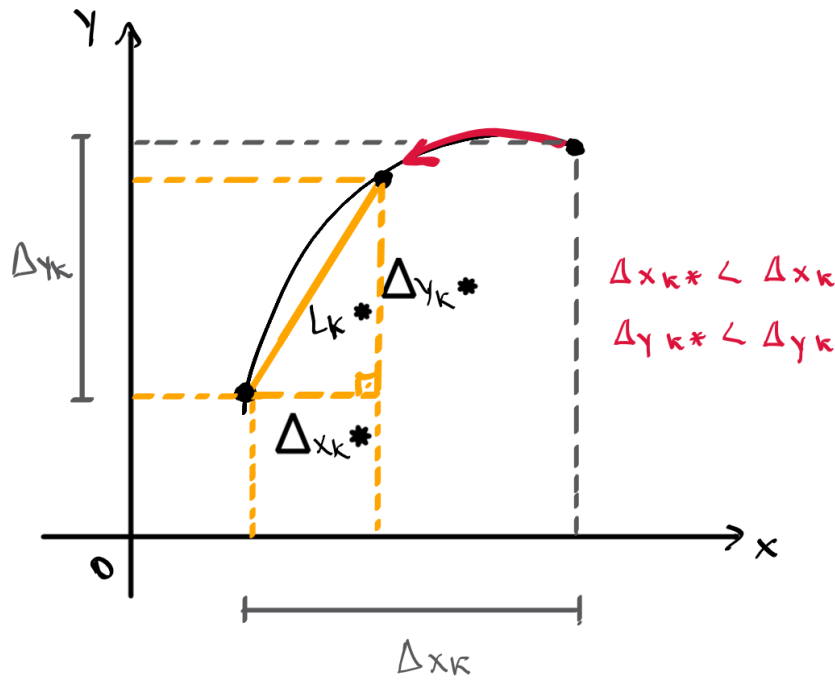
$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}$$

Figura 2 – Aproximação da curva C por segmentos de reta.

Fonte: Autor (2023).

Se tomarmos Δt_k cada vez menores, o comprimento L_k se aproxima mais do comprimento do arco $\widehat{P_{k-1}P_k}$, observe Figura 3. E, para isso, precisamos aumentar a quantidade de subdivisões no intervalo $[a, b]$, assim para um $n_* > n$ (mesmo n tomado inicialmente) teremos um $\Delta t_k < \Delta t$ o que, consequentemente, faz com que $\Delta x_{k*} < \Delta x_k$ e $\Delta y_{k*} < \Delta y_k$, graficamente temos:

Figura 3 – Variação do comprimento do arco $\widehat{P_{k-1}P_k}$.



Fonte: Autor (2023).

Podemos notar que variações no parâmetro t , para mais ou para menos, acarretam variações de x e y e, por sua vez, no comprimento L_k . Assegurado pelo Teorema do Valor Médio, já que f e g são contínuas e deriváveis, temos que aplicando o teorema em f no intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, existe t_k^* tal que:

$$\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f'(t_k^*) \Rightarrow \frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} = f'(t_k^*) \Rightarrow \Delta x_k = f'(t_k^*) \cdot \Delta t_k$$

De forma análoga, para g , existe t_k^{**} tal que:

$$\frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = g'(t_k^{**}) \Rightarrow \frac{\Delta y_k}{\Delta t_k} = g'(t_k^{**}) \Rightarrow \Delta y_k = g'(t_k^{**}) \cdot \Delta t_k$$

Assim, podemos reescrever $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{P_{k-1}P_k} = L_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{(f'(t_k^*) \cdot \Delta t_k)^2 + (g'(t_k^{**}) \cdot \Delta t_k)^2} \\ &= \sqrt{(f'(t_k^*))^2 \cdot (\Delta t_k)^2 + (g'(t_k^{**}))^2 \cdot (\Delta t_k)^2} \\ &= \sqrt{(f'(t_k^*))^2 + (g'(t_k^{**}))^2} \Delta t_k \end{aligned}$$

Assim, para termos uma aproximação para o comprimento L de C , devemos somar cada comprimento de todos os L_k

$$L \approx \sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(f'(t_k^*))^2 + (g'(t_k^{**}))^2} \Delta t_k$$

Geralmente $t_k^* \neq t_k^{**}$, pois f e g diferem e, portanto, a aplicação do Teorema do Valor Médio pode oferecer $t_k^* \neq t_k^{**}$ ou $t_k^* = t_k^{**}$. Contudo, como f e g são contínuas e deriváveis o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{(f'(t_k^*))^2 + (g'(t_k^{**}))^2} \Delta t_k$$

é igual em ambos os casos, portanto temos:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt \quad (4.1)$$

Dessa forma, para encontrarmos o comprimento L da curva C de A até B, resolvemos a integral dada em (4.1), que também pode ser expressa da seguinte forma

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

ou

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt$$

Visto que a o integrando nada mais é do que o módulo da derivada do vetor posição ($r(t)$) que descreve a curva C . Isso nos permite escrever a fórmula para comprimento de uma forma mais compacta.

Quando passamos de uma curva plana para uma curva espacial, também parametrizada, o seu comprimento é definido da mesma forma, a diferença está na fórmula, onde teremos apenas mais um componente referente ao diferencial em relação à componente z . Assim, seja uma curva espacial C descrita pela equação vetorial $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ com $a \leq t \leq b$, onde f , g e h são continuamente deriváveis, o comprimento da curva é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

ou equivalentemente

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt.$$

É muito conveniente definirmos um último conceito antes de irmos para as integrais de linha propriamente ditas. Definiremos o conceito de Função Comprimento de Arco. Enquanto o comprimento de arco de uma curva parametrizada é uma medida da

distância total percorrida ao longo da curva, a função comprimento de arco é uma função que calcula essa distância em relação a um parâmetro, ou seja, é uma função que atribui a cada valor de parâmetro da curva o comprimento de arco percorrido até esse ponto, também pode ser usada para calcular o comprimento de arco entre dois pontos específicos.

Chamamos a função comprimento de arco s dada por

$$s(t) = \int_a^t |r'(\tau)| d\tau. \quad (4.2)$$

Dessa forma $s(t)$ é o valor do comprimento de C entre $r(a)$ e $r(t)$.

Exemplo 1 *Dada uma curva plana que possui parametrização dada por $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$, com $t \in [0, 2\pi]$. Calcularemos o comprimento de arco dessa curva entre $t = 0$ e $t = 2\pi$.*

Primeiro, para a aplicação da fórmula que encontramos $L = \int_a^b |r'(t)| dt$ devemos calcular a derivada do vetor posição $r(t)$ dado por:

$$r'(t) = (-\sin t)i + (\cos t)j$$

Após, devemos encontrar o valor do seu módulo dado por:

$$|r'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}$$

da relação fundamental da trigonometria, temos que:

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

Assim,

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

A essa altura você já deve ter percebido que o que acabamos de calcular nada mais é do que o comprimento de uma circunferência unitária parametrizada por $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$, pela própria parametrização notamos o fato de ser unitária, pois $\cos$ e $\sin$ possuem coeficientes iguais a 1, se não quiséssemos aplicar a fórmula de comprimento de arco, poderíamos atribuir valores para o argumento (ângulo) t variando de 0 a 2π e ao plotarmos os valores computados em um gráfico, o resultado seria uma circunferência unitária que, através da fórmula do comprimento de uma circunferência aprendida no ensino fundamental, $C = 2\pi R$, chegaríamos ao mesmo resultado de antes quando foi usado o comprimento de arco.

Esse exemplo simples, permite mostrar a eficácia da fórmula demonstrada anteriormente $L = \int_a^b |r'(t)| dt$, e a precisão quando a curva parametrizada não for trivial.

A seguir veremos mais um exemplo que trata sobre comprimento de arco e função comprimento de arco, que já será suficiente para prosseguirmos com as integrais de linha.

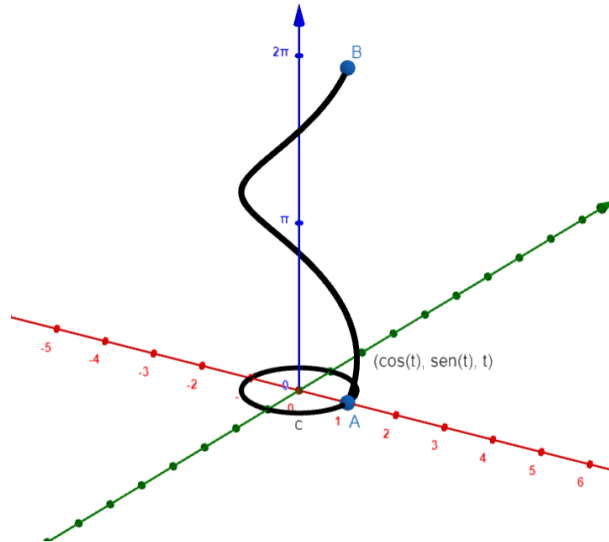
Exemplo 2 (*THOMAS; FINNEY, 1965, p. 187-188*) Uma asa-delta está levantando voo ao longo da hélice $r(t) = (\cos t)i + (t)j + (t)k$. Qual o comprimento da trajetória do planador entre $t = 0$ e $t = 2\pi$

Notamos que em $t = 0$ estamos partindo do ponto $(1, 0, 0)$, pois

$$r(0) = (\cos 0)i + (\sin 0)j + (0)k$$

e indo até o ponto $(1, 0, 2\pi)$, pois $r(2\pi) = (\cos 2\pi)i + (\sin 2\pi)j + (2\pi)k$, assim o arco que é descrito nesse intervalo de t é o representado pela Figura 4

Figura 4 – Trajetória da asa-delta.



Fonte: Autor (2023).

Visto de cima o gráfico no plano xy é uma circunferência — note que sem a componente k ficamos com a parametrização do exemplo anterior, mas como a componente de k é o próprio valor do parâmetro t , a medida que t varia de 0 a 2π a altura aumenta até 2π .

Sendo $r'(t) = (-\sin t)i + (\cos t)j + 1k$ temos que

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

Logo,

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2} - 0 = 2\pi\sqrt{2} \text{ u.c. (Unidade de comprimento)}$$

A partir daqui, se fixamos um ponto inicial, por exemplo, o próprio $(1, 0, 0)$, e quisermos calcular o valor do comprimento para um certo valor de t , devemos encontrar a função comprimento de arco que nos fornece justamente isso. Assim,

$$s(t) = \int_a^t |r'(\tau)| d\tau = \int_a^t \sqrt{2} d\tau = \sqrt{2}\tau \Big|_0^t = \sqrt{2}t - 0 = \sqrt{2}t$$

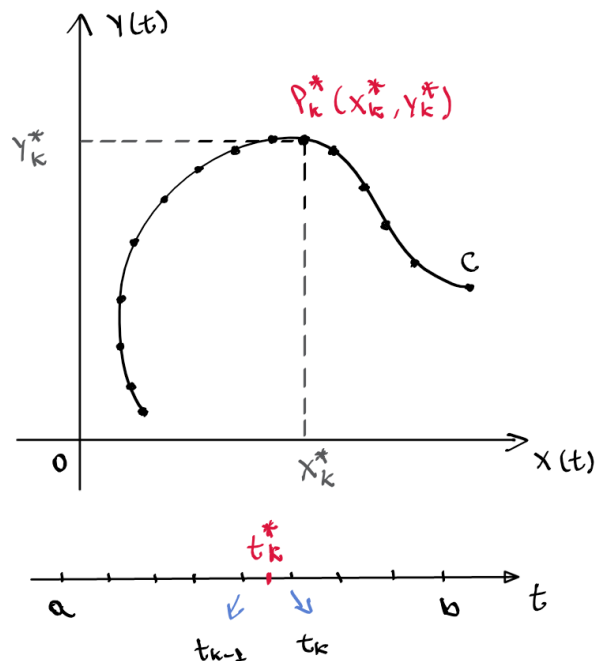
Dessa forma, se quisermos saber o comprimento de arco entre $t = 0$ e $t = \frac{3\pi}{2}$ basta substituírmos o valor de t em $s(t) = \sqrt{2}t$ que dará:

$$s\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \approx 13,19 u.c$$

4.1 Integral de linha de primeira espécie: contextualização e definição no plano e no espaço.

Quando lhes foi apresentado o método de integração, o foco era a integração sobre um intervalo $[a, b]$, de curvas planas ou funções de uma variável ($y = f(x)$). Nas integrais de linhas passaremos a integrar sobre curvas definidas no plano ou no espaço, de funções de duas ou três variáveis, respectivamente. Curvas que serão dadas parametrizadas, isto é, cada ponto que forma a curva é obtido mediante um parâmetro t que varia em um intervalo I limitado de números reais, conforme Figura 5.

Figura 5 – Curva C parametrizada no intervalo $I = [a, b]$.



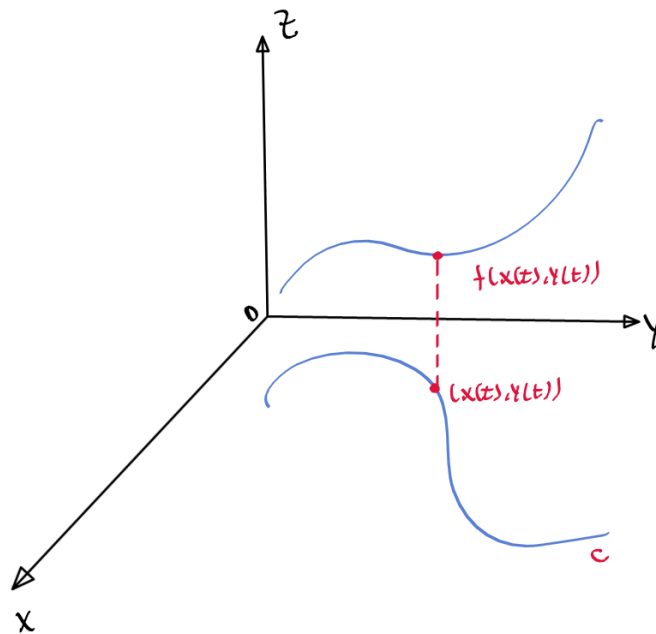
Fonte: Autor (2023).

Assim, cada coordenada x_k e y_k , no caso de uma curva plana, de cada ponto P_k pertencente a curva será encontrada a partir de uma função que depende de t , assim a

curva C é dada por $x = x(t), y = y(t)$ com $a \leq t \leq b$. Que também pode ser escrita na forma vetorial $C : r(t) = x(t)i + y(t)j$ com $a \leq t \leq b$ ou ainda, $C : r(t) = (x(t), y(t))$ com $a \leq t \leq b$.

Seja uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que descreve uma superfície acima do plano xy , nosso objetivo é integrar sobre a curva $C : r(t) = x(t)i + y(t)j$, com $a \leq t \leq b$ que está situada no plano e dentro do domínio de f . Assim, os valores de f quando percorremos a curva C são dados a partir da seguinte composição de $f(x(t), y(t))$. Ficando como mostra Figura 6:

Figura 6 – Curva C através da função f .



Fonte: Autor (2023).

Para chegarmos a integral de linha, usaremos um pensamento análogo à soma de Riemann usada para demonstrar o processo de integração unidimensional. Primeiro particionaremos o intervalo $I = [a, b]$ em um número n de subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$ da seguinte forma (Figura 7):

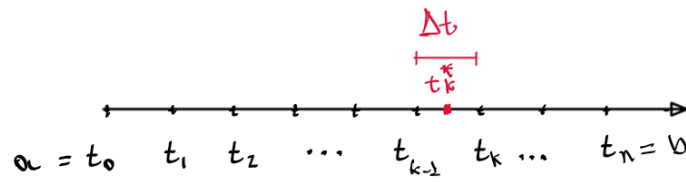
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b$$

tal que

$$\Delta t = \frac{b - a}{n} = t_k - t_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n.$$

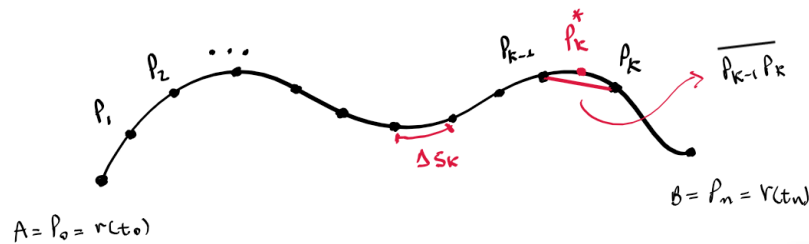
Assim, consequentemente cada $P_k = r(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$ dividirá C no mesmo n número de subarcos que medirão Δs_k , com $1 \leq k \leq n$, observe Figura 8.

Figura 7 – Partição do intervalo $I = [a,b]$.



Fonte: Autor (2023).

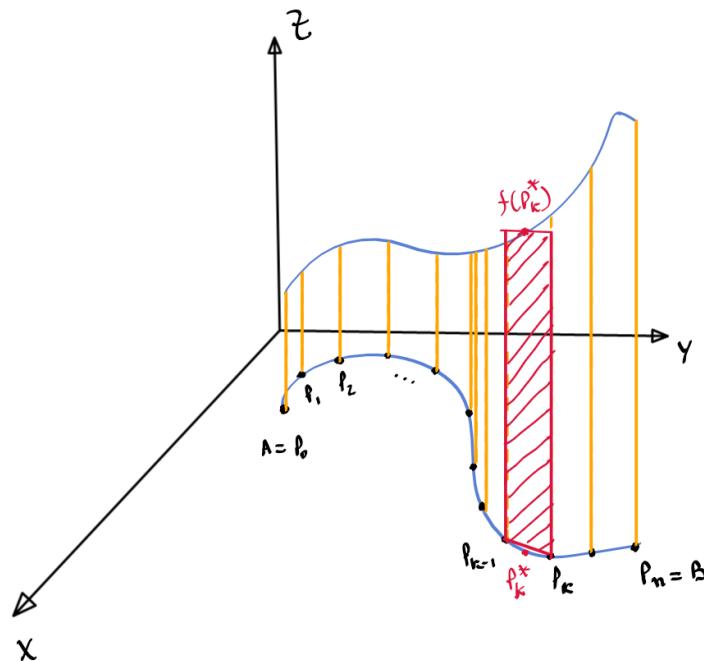
Figura 8 – Partição da curva C através da partição de $I = [a,b]$.



Fonte: Autor (2023).

Defina t_k^* conforme está na Figura 7 sendo o ponto médio em cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, assim $P_k^* = r(t_k^*) = (x(t_k^*), y(t_k^*))$ como mostra Figura 8 e então calculamos sua imagem a partir de f e teremos então a sua “altura” em relação ao plano xy do retângulo representado na Figura 9.

Figura 9 – “Altura” de f em relação ao plano xy .



Fonte: Autor (2023).

Podemos observar que multiplicando $f(P_k^*)$ “altura” por $\overline{P_{k-1}P_k}$ aproximação comprimento do respectivo subarco Δs_k na qual foi tomado P_k^* , calcularemos uma aproximação para a área do retângulo formado que será dada por:

$$A_k \approx f(P_k^*) \cdot \overline{P_{k-1}P_k} = f(x(t_k^*), y(t_k^*)) \cdot \Delta s_k$$

e então somamos todas as áreas dos retângulos formados ao longo de C .

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x(t_k^*), y(t_k^*)) \cdot \Delta s_k$$

Conforme n aumenta, nossa aproximação melhora, pois, as bases dos retângulos cada vez mais estarão próximas do comprimento dos subarcos sem perda de medida, pois em nossa aproximação, inicialmente adotamos como base o valor de um segmento de reta $\overline{P_{k-1}P_k}$, mesmo que pequeno, mas que possui comprimento diferente de um subarco com as mesmas extremidades P_k e P_{k-1} , e quando n tende ao infinito, calculamos o somatório dessas áreas para Δs_k ínfimos, ou seja, Δs_k tende a 0. Assim o limite desse somatório quando n tende ao infinito é igual a:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \cdot \Delta s_k = \int_C f(x, y) ds \quad (4.3)$$

Esse ds é o nosso diferencial de arco, que representará o comprimento infinitesimal de cada subarco, com a expressão para a função comprimento de arco $s(t)$ que chegamos anteriormente em (4.2), temos, a partir da derivação de $s(t)$ em relação a t

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t |r'(t)| dt \\ &= |r'(t)| \end{aligned}$$

Portanto,

$$ds = |r'(t)| dt$$

Substituindo ds na expressão que achamos para a integral de linha chegamos que ela pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) |r'(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (4.4)$$

Da demonstração acima, podemos perceber que para as integrais de linha de primeira espécie no plano, quando estamos trabalhando com uma função positiva, ou seja, $f(x, y) \geq 0$, isto é, uma função contínua não negativa, podemos interpretar $\int_C f(x, y) ds$ como a área da “parede” formada abaixo de f e acima da curva $C : r(t) = x(t)i + y(t)j$.

A expansão do cálculo da integral de linha para curvas espaciais se dá de forma natural e similar ao que foi feito com comprimento de arco.

Seja uma curva espacial C descrita pela equação vetorial $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, com $a \leq t \leq b$. Seja também f uma função de três variáveis contínua em alguma região do espaço que contenha C . Aqui estamos em uma situação em que o domínio de f é um “pedaço”, ou melhor, dizendo, uma região do espaço onde cada ponto (x, y, z) é levado por f a um gráfico quadridimensional, o que desde já nos impede de esboçar o gráfico de f , cabendo a nós apenas a possibilidade de visualizar sua “sombra” representada pelo seu domínio. Definimos a integral de linha de curvas espaciais da mesma forma que para curvas planas:

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z) ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \Delta s_k \\ \int_C f(x, y, z) ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \Delta s_k\end{aligned}\quad (4.5)$$

Substituindo ds em (4.5) temos:

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt\end{aligned}$$

De agora em diante, para calcularmos a integral de linha de função $f(x, y, z)$ sobre uma curva C devemos ter conhecimento da parametrização de C e a partir dela temos todos os elementos para calcular a integral. Veja:

Exemplo 3 (STEWART, 2006, p. 955) Calcule $\int_C (2+x^2y) ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Da forma como a curva foi apresentada pelo exercício, precisamos encontrar uma parametrização para ela. Relembrando do início da trilha, vimos que o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das seguintes equações $x = \cos t$ e $y = \sin t$, ou seja, pela equação vetorial $C : r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$, com $0 \leq t \leq \pi$, o parâmetro t vai apenas até π pois o enunciado disse que a curva é a parte superior do círculo, caso fosse o círculo completo t variaria até 2π

Caso não se recorde dessa parametrização logo de início, poderia proceder da seguinte forma para encontrar a parametrização dessa equação na forma implícita. Temos que a equação da circunferência é dada por $x^2 + y^2 = 1$, sabemos ainda pela relação fundamental da trigonometria que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (usamos t pois é a variável parâmetro), assim, fazendo

$$x^2 = \cos^2 t \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\cos^2 t} \Rightarrow x = \cos t$$

e

$$y^2 = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t} \Rightarrow y = \operatorname{sen} t$$

Como o exercício pede a metade superior do círculo então devemos trabalhar com $y \geq 0$, como $y = \operatorname{sen} t$ temos que $\operatorname{sen} t \geq 0$, dessa forma para valores de *seno* positivos $0 \leq t \leq \pi$.

Seguindo, temos que $r'(t) = -\operatorname{sen}(t)i + \cos(t)j$ e $|r'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)}$, além disso $f(r(t)) = 2 + \cos^2(t)\operatorname{sen}(t)$, logo:

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2 y) ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t)\operatorname{sen}(t)) \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t)\operatorname{sen}(t)) dt \\ &= \left. 2t - \frac{\cos^3(t)}{3} \right|_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Você já deve ter percebido que em nosso estudo de Integrais de linha, será muito recorrente o uso dos conceitos de parametrização, ora para parametrizar uma curva, ora para interpretar uma parametrização fornecida pela situação. Sendo assim, é necessária uma boa compreensão sobre esse assunto, que não é de difícil entendimento.

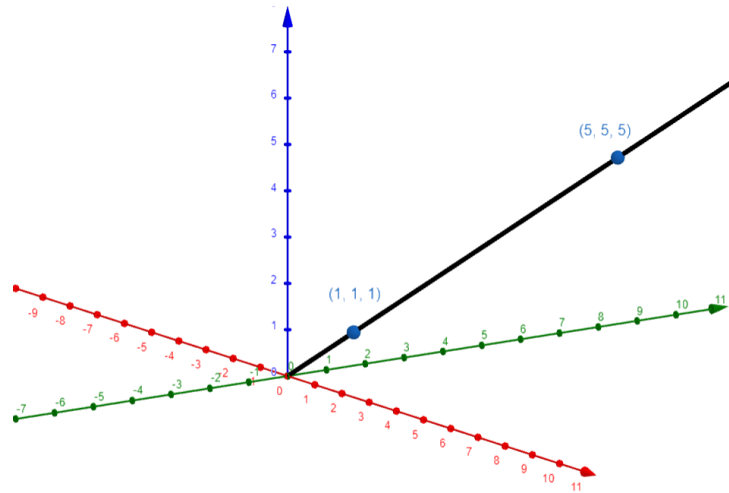
Vamos para a resolução de mais um exemplo.

Exemplo 4 (THOMAS; FINNEY, 1965, p. 367) Encontre a integral de linha da função f abaixo sobre a curva $C : r(t) = (t)i + (t)j + (t)k$ com $0 \leq t \leq \infty$.

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Já foi fornecido a curva na sua forma paramétrica, podemos saber de qual curva se trata analisando a parametrização. Se atribuirmos valores para t começando por $t = 1$ encontramos o ponto $(1, 1, 1)$, se seguirmos esse raciocínio até $t \leq \infty$ construiremos uma reta, conforme Figura 10.

Figura 10 – Reta — exemplo 3



Fonte: Autor (2023).

Agora encontremos a derivada e o módulo do vetor posição que descreve a curva (reta):

$$r'(t) = 1i + 1j + 1k \Rightarrow |r'(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Aplicando a parametrização da curva em f encontramos os valores de f a medida que C é percorrida. assim:

$$f(r(t)) = \frac{\sqrt{3}}{(t^2 + t^2 + t^2)} = \frac{\sqrt{3}}{3t^2}$$

Por fim, fazemos a substituição na equação da integral de linha, ficando:

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt \Rightarrow \int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{3}}{3t^2} \right) \sqrt{3} dt \\ &\Rightarrow \int_1^\infty \frac{3}{3t^2} dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt \end{aligned}$$

Aqui temos uma integral com o limite superior sendo ∞ , chamamos esse tipo de integral imprópria, para resolvê-la devemos substituir o ∞ por uma variável qualquer, chamaremos de b , depois dessa substituição devemos calcular o limite dessa integral quando

essa b tender ao ∞ . Primeiro calculamos a integral e depois resolvemos o limite, veja:

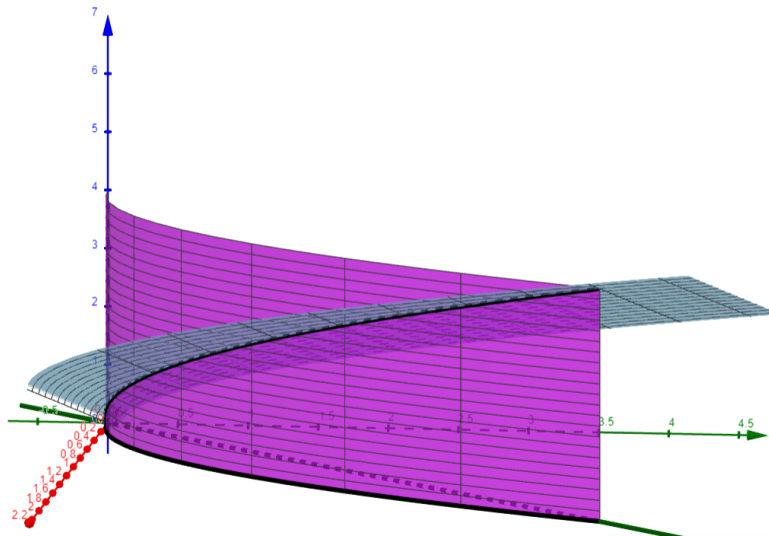
$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{t^2} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b t^{-2} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -t^{-1} \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{t} \right) \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{b} + 1 \right) \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{t^2} dt &= 1\end{aligned}$$

Qualquer interpretação para o resultado de uma integral de linha, dependerá do entendimento, principalmente físico, que se tem sobre a função f . Podemos ter desde a área abaixo de f sobre a curva C até a massa da parte de um fio cuja densidade linear é expressar por f . As aplicações podem ser nas mais diversas áreas.

Exemplo 5 (THOMAS; FINNEY, 1965, p. 368) Encontre a área de um dos lados da “parede curva” de pé ortogonalmente sobre a curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, e abaixo da curva na superfície $f(x, y) = x + \sqrt{y}$.

A curva em questão se trata de uma parábola, limitada no eixo das abscissas por $0 \leq x \leq 2$ e acima dela existe a superfície $f(x, y) = x + \sqrt{y}$, observe a Figura 11 que mostra essa situação:

Figura 11 – Gráfico exemplo 4



Fonte: Autor (2023).

Sabemos que a $\int_a^b f(x(t), y(t))|r'(t)|dt$ quando $f(x(t), y(t)) \geq 0$, então devemos encontrar a parametrização da curva dada, seu módulo e aplicar a fórmula, observando os limites de parametrização para não incluirmos o caso onde $f(x(t), y(t)) \leq 0$, assim podemos parametrizar a curva da seguinte forma, fazendo $x = t$ temos que $y = t^2$ logo a parametrização será:

$$C : r(t) = ti + t^2j, 0 \leq t \leq 2$$

Note que os limites de t permaneceram iguais aos de x pois a parametrização escolhida foi a mais simples possível, mas poderíamos escolher outra parametrização como, por exemplo $C : r(t) = (\sin t)i + (4\sin^2 t)j$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Observação 1 *O raciocínio usado para chegar a segunda parametrização foi: precisamos de que x varie entre 0 e 2, se fizermos $x = \sin(t)$, assim x varia entre -1 e 1, podemos esticar a amplitude da função $\sin$ multiplicando-a por 2, assim $x(t) = 2\sin(t)$, agora x varia entre -2 e 2 a medida que t varia de 0 a 2π , se fizermos $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ conseguimos a variação que queríamos para x , pois $x(0) = 2\sin(0) = 0$ e $x(\frac{\pi}{2}) = 2\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$, para $y(t)$ apenas elevamos $x(t)$ ao quadrado.*

Seguindo, devemos encontrar a derivada de $r(t)$ que é: $r'(t) = (1)i + (2t)j$ e em seguida seu módulo: $|r'(t)| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$, agora encontrando $f(r(t))$, temos:

$$f(r(t)) = f(t, t^2) = t + \sqrt{t^2} = 2t$$

Substituindo na expressão de integral de linha, temos:

$$A = \int_0^2 2t(\sqrt{1 + 4t^2})dt$$

Agora basta resolver a integral por substituição e teremos o valor da área. Fazendo $u = 1 + 4t^2$ chegamos que $du = 8tdt$ e $dt = \frac{du}{8t}$, com $1 \leq u \leq 17$, logo:

$$\begin{aligned} \int_0^2 2t(\sqrt{1 + 4t^2})dt &= \int_1^{17} 2t \frac{u^{1/2}}{8t} du \\ &= \int_1^{17} \frac{u^{1/2}}{4} du \\ &= \frac{2}{12} u^{3/2} \Big|_1^{17} \\ &= \frac{1}{6} u^{3/2} \Big|_1^{17} \end{aligned}$$

Retornando para a variável t temos:

$$A = \frac{1}{6} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{1}{6} (17^{3/2} - 1) \approx 11,52$$

(unidade de área)

Antes de resolver os exercícios propostos, existe uma propriedade muito importante e útil das integrais de linha. Essa propriedade vai ajudar quando a curva for composta pelo encontro de várias curvas ou quando for complexa para ser analisada por completo, mas dividi-la for um caminho viável.

Propriedade 1 *Seja C uma curva parametrizável tal que $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$, a integral de linha de uma função f sobre C é a soma das integrais sobre as curvas que compõem C , em termos matemáticos, temos:*

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \dots + \int_{C_n} f ds \quad (4.6)$$

Agora pratique sozinho.

4.1.1 Exercícios Propostos

Exercício 1 (STEWART, 2006, p. 961) Calcule $\int_C (x^2 y^3 - \sqrt{x}) ds$, onde C é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1,1)$ a $(4,2)$.

Exercício 2 (THOMAS; FINNEY, 1965, p. 368) Calcule $\int_C \sqrt{x+2y} ds$, onde C é:

- i. o segmento de reta $x = t$, $y = 4t$, entre $(0,0)$ e $(1,4)$;
- ii. $C_1 \cup C_2$: C_1 é o segmento de reta entre $(0,0)$ e $(1,0)$ e C_2 é o segmento de reta entre $(1,0)$ e $(1,2)$.

Exercício 3 (STEWART, 2006, p. 963) A base de uma cerca circular com raio de 10m é dada por $x = 10\cos(t)$, $y = 10\sin(t)$. A altura da cerca na posição (x,y) é dada pela função $h(x,y) = 4 + 0,01(x^2 - y^2)$, de modo que a altura varia de 3m a 5m. Suponha-se que 1L de tinta cubra $100m^2$. Faça um esboço da cerca e determine de quanta tinta você precisará para pintar os dois lados da cerca.

Exercício 4 Encontre a massa de um arame, com a forma da interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e do plano $x + z = 0$, se a densidade do arame em (x,y,z) for $x^2 + y^2$.

Exercício 5 Um arame fino é entortado no formato da curva da interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $y = x$, situado no primeiro octante que liga o ponto $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ ao ponto $B = (1, 1, \sqrt{2})$. Calcule a massa do arame, sendo a densidade em cada ponto proporcional ao quadrado da distância do ponto ao plano yz .

4.2 Integral de Linha de campos vetoriais

Antes de iniciarmos o estudo de integrais de linha, refresquemos nossa memória sobre o que é um campo vetorial. Para os estudantes de física e engenharias esse conceito é bastante recorrente durante todo o curso, mas, para os estudantes de matemática, às vezes se torna um conceito não muito bem compreendido. Pensando pelo lado mais matemático, campo vetorial, de acordo com Stewart (2006), geralmente é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ e cuja imagem é um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. De forma mais simples, um campo vetorial é uma maneira de descrever como um vetor varia no espaço. Temos que a cada ponto do domínio associamos um vetor, com origem nesse ponto. Assim o campo vetorial fornece informações sobre direção, sentido e intensidade em cada ponto do plano ou espaço. Esses vetores podem ser a representação de muitos fenômenos da natureza, como força, fluidos (água, ar, etc.) em movimento, de forma que qualquer objeto que esteja sob área de influência desse campo, sofrerá as consequências com maior ou menor intensidade, dependendo da forma como o campo se comporta e da posição que ele está.

Se o campo for em um domínio bidimensional ele pode ser expresso como

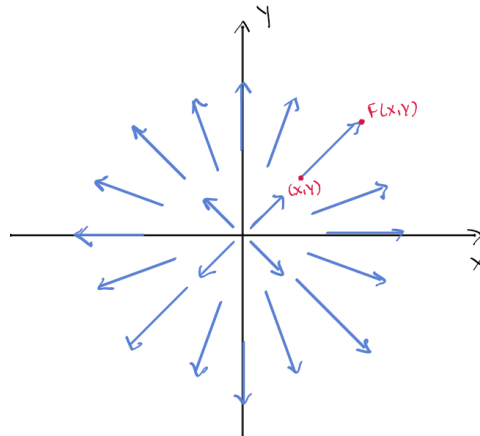
$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$

ou ainda, em uma forma mais curta

$$F(x, y) = Pi + Qj$$

Onde P e Q são funções escalares (funções a valores reais), isto é, a imagem é um número real e não um vetor. (Observe na Figura 12).

Figura 12 – Campo vetorial bidimensional.



Fonte: Autor (2023).

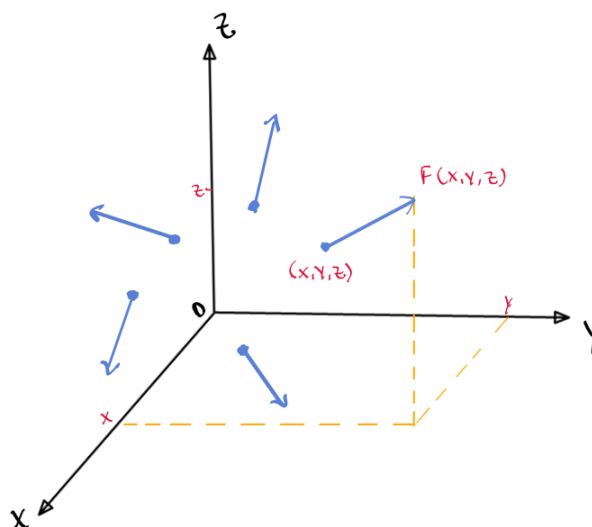
Se o campo for em um domínio tridimensional ele pode ser expresso como:

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

Observação 2 As observações feitas para P e Q se estendem da mesma forma para R .

Observe na Figura 13

Figura 13 – Campo vetorial tridimensional.



Fonte: Autor (2023).

Algumas considerações importantes sobre campos vetoriais:

Consideração 1 O campo F é contínuo se as suas funções componentes P , Q e R são contínuas. Isso é importante porque permite fazer previsões precisas sobre o comportamento do campo em qualquer ponto do espaço. Se houvesse saltos ou descontinuidades no campo, seria mais difícil prever seu comportamento, dificultando entender e controlar os fenômenos físicos analisados.

Consideração 2 O campo F é diferenciável se as suas função componentes P , Q e R são diferenciáveis. Isso quer dizer que a derivada do campo vetorial, que se dá através da derivação de suas componentes, existe em todos os pontos do domínio, assim se as funções componentes são diferenciáveis, podemos analisar a taxa de variação (derivada) do vetor em todos os pontos do campo. Essa propriedade é muito útil, por permitir a aplicação de técnicas matemáticas, que geralmente medem a taxa de variação instantânea em diferentes direções, para analisar seu comportamento como, por exemplo, o fluxo de fluidos em tubulações, transferência de massa entre outros.

Consideração 3 Dada uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o campo gradiente de f é dado por:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}i + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}j + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}k$$

Até agora ainda não havíamos falado do gradiente de uma função. Você deve se lembrar, geralmente nas disciplinas de cálculo 2 ou 3, quando é trabalhado o cálculo diferencial e integral para funções de mais de duas variáveis, quando provavelmente lhes foi apresentado a derivada direcional de uma função, que brevemente, é a derivada de uma função na direção de um vetor unitário qualquer, não apenas da direção de x ou de y . Na demonstração do cálculo dessa derivada direcional, em certo momento, resultou em um produto escalar semelhante ao seguinte:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \cdot [u_1, u_2]$$

Onde (x, y) é um ponto do domínio de f e (u_1, u_2) são os componentes do vetor unitário.

A expressão da esquerda, foi o que naquele momento definiu-se como gradiente de uma função f . O gradiente possui uma propriedade muito interessante e também muito útil no estudo das integrais de linha, o gradiente indica, em cada ponto, a direção e sentido em que a derivada direcional é máxima ou mínima, no caso do vetor oposto ao gradiente.

Trazendo para os campos vetoriais, o campo gradiente é um tipo de campo formado por todos os vetores gradientes de uma função.

Definiremos integral de linha de campos vetoriais começando por uma aplicação física da situação, o trabalho. Analogamente ao que fazemos quando analisamos e calculamos o trabalho feito por uma força F para mover um objeto ou partícula de um ponto A até B ao longo do eixo x dado pelo seguinte produto vetorial $W = F \cdot D$, onde $D = \overrightarrow{AB}$, ou seja, o trabalho é dado pelo produto escalar entre o vetor força e o vetor deslocamento. Mas, e se o deslocamento não for uma curva reta e/ou a força for variável ao longo da curva?. Também calcularemos o trabalho, mas agora exercido pelo campo de força F para mover uma partícula ao longo não mais do eixo x , mas ao longo de uma curva C .

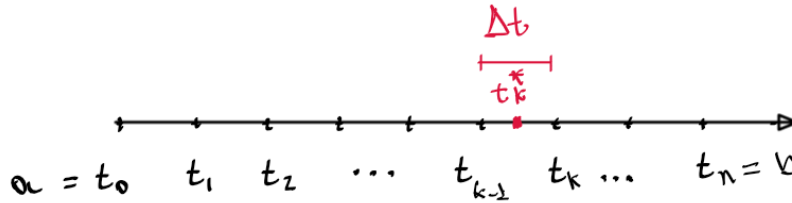
Definição 1 Seja $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ um campo vetorial contínuo e definido em uma região que contém a curva $C : r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, com $a \leq t \leq b$. Então, o trabalho realizado ao mover um objeto de um ponto $A = r(a)$ para um ponto $B = r(b)$ ao longo da curva C é dado pela equação (4.7):

$$W = \int_C F \cdot T ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt \quad (4.7)$$

Iniciemos semelhantemente ao que foi feito nas integrais de linha de 1ª espécie. Tome um intervalo $I = [a, b]$ onde se encontra a variação do parâmetro t que descreve a curva C e faça uma partição nesse intervalo da seguinte forma (Figura 14):

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b$$

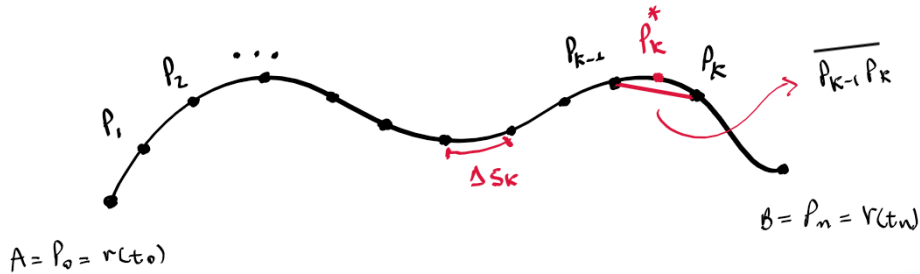
Figura 14 – Partição do intervalo $I = [a, b]$.



Fonte: Autor (2023).

De tal forma que $\Delta t = \frac{b-a}{n} = t_k - t_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n$. Assim, para cada t_k temos um $P_k = r(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$ que dividirá C no mesmo número n de subarcos que medirão Δs_k , com $1 \leq k \leq n$, a curva ficará dividida por n pontos da forma: $A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_{K-1}, P_K, \dots, P_n = B$, conforme Figura 15.

Figura 15 – Partição da curva C através da partição de $I = [a, b]$.



Fonte: Autor (2023).

Elegendo um ponto $P_k^*(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ que é obtido a partir de um t_k^* , podemos perceber que se Δs_k for pequeno, o que acontece quando tomamos Δt cada vez menores, o movimento da partícula de P_{k-1} para P_k possui um deslocamento aproximadamente igual a:

$$\overline{P_{k-1}P_k} = P_k - P_{k-1} = r(t_k) - r(t_{k-1}) = r'(t_k^*)\Delta t \approx \Delta s_k$$

Observação 3 Essa passagem se dá por conta da derivada de $r(t)$ em t_k^* ser aproximadamente igual a $r'(t_k^*) \approx \frac{\Delta r}{\Delta t}$, passamos Δt multiplicando, logo a variação da posição (Δr) é aproximadamente igual a $\Delta r = P_k - P_{k-1} = r(t_k) - r(t_{k-1}) \approx r'(t_k^*) \cdot \Delta t$.

Assim o trabalho feito para mover a partícula de P_{k-1} até P_k é dado por:

$$W \approx F(r(t_k^*)) \cdot r'(t_k^*) \cdot \Delta t$$

e o trabalho total executado pela força F para mover a partícula de A até B é dado, aproximadamente, pelo somatório do trabalho exercido em cada subarco Δs_k , assim:

$$W \approx \sum_{k=1}^n F(r(t_k^*)) \cdot r'(t_k^*) \cdot \Delta t$$

e finalmente o trabalho será igual quando Δs_k tender a 0, para isso precisamos infinitos subarcos, ou seja, $n \rightarrow \infty$, dessa forma:

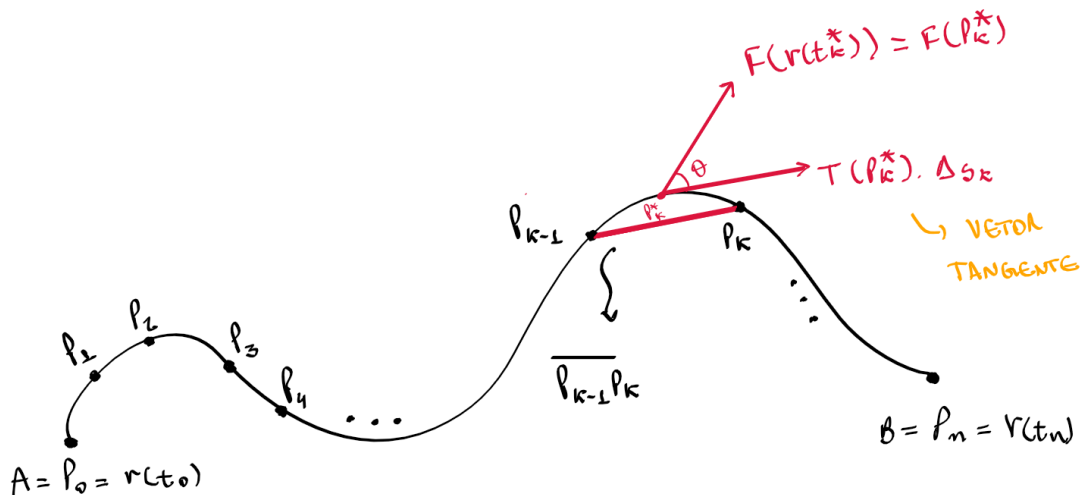
$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(r(t_k^*)) \cdot r'(t_k^*) \cdot \Delta t \\ &\Rightarrow \int_C F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_C F \cdot dr \end{aligned}$$

Em seus estudos, também será recorrente a notação dada em (4.8) para essa mesma integral

$$\int_C F \cdot T ds \quad (4.8)$$

Acontece que, se repararmos, o movimento da partícula ocorre na direção do vetor tangente unitário $T(t_k^*)$ (que aponta para a direção de avanço da trajetória) que nada mais é do que a derivada do vetor posição dividido por seu módulo ($T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$) no ponto em questão. Observe Figura 16.

Figura 16 – Movimento da partícula sob ação de um campo vetorial.



Fonte: Autor (2023).

Como $r'(t) = \frac{dr}{dt}$ podemos efetuar a seguinte manipulação:

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{\frac{dr}{dt}}{|r'(t)|}$$

$$\Rightarrow T = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{1}{|r'(t)|} = \frac{dr}{|r'(t)|dt}$$

Relembrando da seguinte relação que chegamos anteriormente que diz que:

$$\frac{ds}{dt} = |r'(t)| \Rightarrow ds = |r'(t)|dt$$

Podemos substituir e chegar a expressão abaixo:

$$T = \frac{dr}{ds} \Rightarrow dr = Tds$$

Logo,

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F \cdot Tds$$

Outra forma de se chegar a essa expressão seria a seguinte: Da expressão que usamos para calcular o trabalho $W = F \cdot D$, onde $D = \overrightarrow{AB}$, ou seja, o trabalho é dado pelo produto escalar entre o vetor força e o vetor deslocamento. Na situação descrita pela Figura 16, o vetor força é $F(P_k^*)$ e o vetor deslocamento é dado por $T(P_k^*)\Delta s_k$, ou seja, com esse produto temos que o vetor deslocamento possui a direção e sentido do vetor tangente unitário no ponto P_k^* e possui por sua vez o tamanho aproximado do subarco Δs_k . Logo, conforme n aumenta as aproximações feitas melhoram, assim:

$$\begin{aligned} W &= F \cdot D \approx F(P_k^*) \cdot [T(P_k^*)\Delta s_k] \\ \Rightarrow W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(P_k^*) \cdot [T(P_k^*)\Delta s_k] \\ &\Rightarrow W = \int_C F \cdot Tds \end{aligned}$$

Portanto, as expressões para a integral de linha em campos vetoriais abaixo são equivalentes:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F \cdot Tds = \int_C F(r(t)) \cdot r'(t)dt$$

Sendo essa última expressão a mais utilizada para realizar os cálculos que envolvem esse conceito. Também será muito comum aparecer a seguinte notação

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

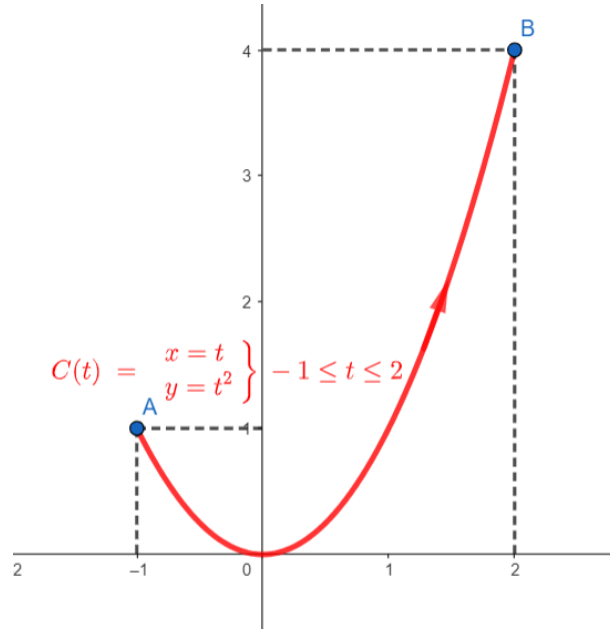
com $F = Pi + Qj + Rk$ que é chamada de notação diferencial, ela é resultado do seguinte produto:

$$\int_C F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_C (Pi + Qj + Rk) \cdot (x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k)dt$$

Exemplo 6 Suponha que uma partícula se mova ao longo de uma parábola $y = x^2$ do ponto $(-1,1)$ ao ponto $(2,4)$. Encontre o trabalho realizado, se o movimento for causado pelo campo de forças $F(x,y) = (x^2 + y^2)i + (3x^2y)j$. Admita que os arcos sejam medidos em metros e a força em Newton.

Em primeiro lugar, podemos extrair que o campo é um campo bidimensional e também a curva. Podemos esboçar o gráfico de C com facilidade, pois se trata de uma função do segundo grau, veja Figura 17:

Figura 17 – Gráfico função do segundo grau.



Fonte: Autor (2023).

Para utilizarmos os conhecimentos sobre integrais de linha em campo vetoriais precisamos encontrar uma parametrização para a curva. Chamando $x = t$ temos que $y = t^2$ assim a curva parametrizada fica $C : r(t) = (t, t^2)$, com $-1 \leq t \leq 2$ (a mesma variação de x), perceba que se fizermos $r(-1) = (-1, 1) = A$ e $r(2) = (2, 4) = B$.

Definida a parametrização de C precisamos encontrar sua derivada, logo $r'(t) = (1, 2t)$. Agora basta recorremos a uma das 3 expressões para encontrar o trabalho.

$$\begin{aligned}
 \int_C F(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_a^b (t^2 + t^4, 3t^4) \cdot (1, 2t) dt \\
 &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 3t^4 \cdot 2t) dt \\
 &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5) dt \\
 &= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6 \right) \Big|_{-1}^2 \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{32}{5} + 64 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 \right) \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{33}{5} + \frac{1}{5} + 63 \\
 &= 66 + \frac{34}{5}
 \end{aligned}$$

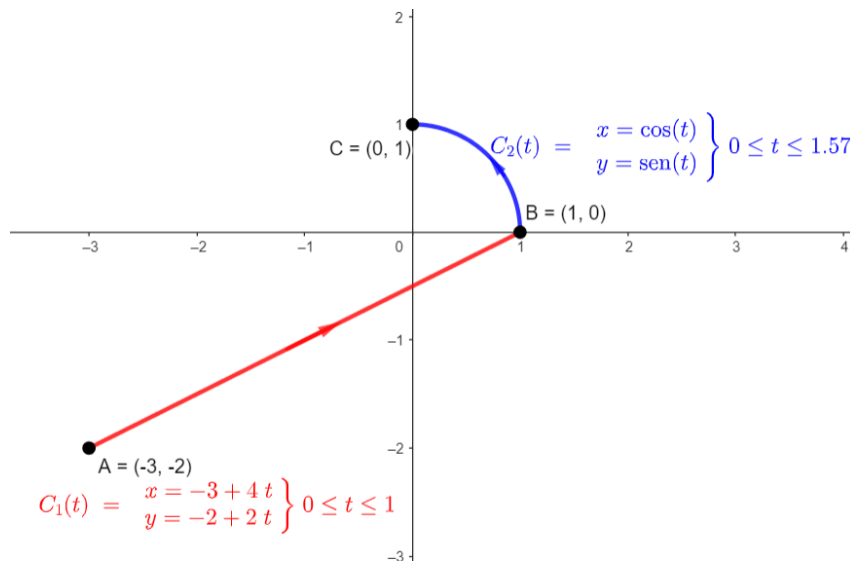
Portanto,

$$W = \int_C F \cdot dr = \left(66 + \frac{34}{5}\right) J$$

Exemplo 7 Calcule a integral de linha $\int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy$ sendo a curva C o segmento de reta que vai de $(-3, -2)$ a $(1, 0)$ e no arco do primeiro quadrante da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Primeiro esboçemos o gráfico que representa a situação da curva descrita, note que ela é dada pela composição de duas curvas bastante conhecidas, um segmento de reta e um arco de uma circunferência, devemos tomar cuidado com os limites dos intervalos para as parametrizações. Veja Figura 18 :

Figura 18 – Segmento de reta unido com arco de circunferência do 1º quadrante.



Fonte: Autor (2023).

Chamando de $A = (-3, -2)$ e de $B = (1, 0)$, encontremos uma parametrização para o segmento de reta que chamaremos de curva C_1 . Para encontrarmos uma parametrização recorreremos aos conhecimentos de geometria analítica. Dados 2 pontos conhecidos da reta, no caso A e B, basta aplicarmos a definição que segue:

$$\begin{aligned} C_1 : r_1(t) &= A + t \cdot \vec{AB} = (-3, -2) + t[(1, 0) - (-3, -2)] \\ \Rightarrow r_1(t) &= (-3, -2) + t(4, 2) = (-3 + 4t, -2 + 2t) \end{aligned}$$

com $0 \leq t \leq 1$

Para o arco do primeiro quadrante de $x^2 + y^2 = 1$ que chamaremos de C_2 parametrizaremos usando função trigonométrica, basta lembrar da relação fundamental

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, logo para C_2 teremos:

$$C_2 : r_2(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Para podermos continuar, precisamos chamar atenção para a necessidade do uso de uma propriedade das integrais de linhas, a aditividade, conforme resultado da equação (4.6), e que se estende para as integrais de linha em campos vetoriais. Assim, a curva C do exercício é formada pela união de C_1 com C_2 , ou seja, $C = C_1 \cup C_2$ e, conseqüentemente, $\int_{C=C_1 \cup C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr_1 + \int_{C_2} F \cdot dr_2$

Para $\int_{C_1} F \cdot dr_1$, devemos ter a derivada de $r_1(t)$, logo $r'_1(t) = (4, 2)$, precisamos também do $F(r_1(t))$:

$$F(r_1(t)) = (4 \cdot (-3 + 4t) \cdot (-2 + 2t), 2 \cdot (-3 + 4t)^2 - 3 \cdot (-3 + 4t) \cdot (-2 + 2t))$$

$$\Rightarrow F(r_1(t)) = (24 - 56t + 32t^2, 8t^2 - 6t)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F \cdot dr_1 &= \int_0^1 (24 - 56t + 32t^2, 8t^2 - 6t) \cdot (4, 2) dt \\ &= \int_0^1 (96 - 236t + 144t^2) dt \\ &= \left(96t - 118t^2 + 48t^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= (96 - 118 + 48 - 0) \\ &= 26 \end{aligned}$$

Para $\int_{C_2} F \cdot dr_2$, devemos ter a derivada de $r_2(t)$, logo $r'_2(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, precisamos também do $F(r_2(t))$:

$$F(r_2(t)) = (4 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t), 2 \cdot \cos^2(t) - 3 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t))$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} F \cdot dr_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t), 2 \cdot \cos^2(t) - 3 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-6\sin^2(t)\cos(t) + 2\cos(t) - 3\cos^2(t)\sin(t)) dt \\ &= -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos(t) dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin(t) dt \end{aligned}$$

Agora devemos resolver a integral de cada parcela para encontrarmos o valor de $\int_{C_2} F \cdot dr_2$.

Para a 1ª parcela, temos: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(t) \cos(t) dt$, fazendo $u = \text{sen}(t)$ temos que $du = \cos(t) dt$, assim:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(t) \cos(t) dt = \int_0^1 u^2 du = \left(\frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Para a 2ª parcela, temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \left(\text{sen}(t) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Para a 3ª parcela, temos: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \text{sen}(t) dt$, fazendo $u = \cos(t)$ temos que $du = -\text{sen}(t) dt$, assim:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \text{sen}(t) dt = - \int_1^0 u^2 du = - \left(\frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^0 = \frac{1}{3}$$

Portanto,

$$\int_{C_2} F \cdot dr_2 = -6 \left(\frac{1}{3} \right) + 2(1) - 3 \left(\frac{1}{3} \right) = -2 + 2 - 1 = -1$$

Dessa forma,

$$\int_{C=C_1 \cup C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr_1 + \int_{C_2} F \cdot dr_2 = 26 - 1 = 25$$

Agora pratique sozinho.

4.2.1 Exercícios Propostos

Exercício 6 Uma partícula percorre a cúbica retorcida $r(t) = (t)i + (t^2)j + (t^3)k$, $0 \leq t \leq 1$. Calcule o trabalho realizado, se o movimento for causado pelo campo de forças $F(x, y, z) = (e^x)i + (xe^z)j + x \text{sen}(\pi y^2)k$. Admita que os arcos sejam medidos em metros e a força em Newton.

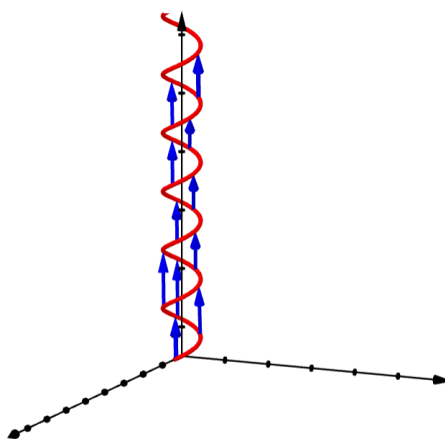
Exercício 7 (STEWART, 2006, p. 962) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $F(x, y) = (x^2)i + (ye^x)j$ em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

Exercício 8 (STEWART, 2006, p. 962) A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição $r(t) = xi + yj + zk$ é $F(r) = \frac{Kr}{|r|^3}$, onde K é uma constante. Encontre o trabalho realizado quando a partícula se move ao longo de uma linha reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.

4.3 Integrais de escoamento e circulação para campos de velocidade

Conforme o que vimos sobre os campos vetoriais, podemos perceber que eles exercem influência naquilo que está ao seu redor. Acabamos de ver também uma forma de quantificar o trabalho exercido por um campo de força em uma partícula ao longo de uma trajetória parametrizável. Continuando esse raciocínio, podemos entender a integral de linha em mais um contexto físico descrito pelo escoamento de um fluido qualquer ao longo de uma curva, também qualquer, que está sob a ação de um campo de velocidade desse fluido, ou seja, podemos quantificar a maneira como um fluido se move diante da presença de um campo vetorial. Veja na Figura 19 o exemplo em uma situação genérica, onde temos uma curva e um campo vetorial.

Figura 19 – Curva espacial com ação de um campo vetorial.



Fonte: Autor (2023).

Para exemplificar, considere, por exemplo, um rio que flui por uma região montanhosa. Se quisermos descrever a maneira como o fluido se move ao longo desse espaço, precisamos usar um campo vetorial. Esse campo vetorial associa um vetor a cada ponto do espaço, o que nos permite determinar a direção e a intensidade do fluxo em qualquer ponto específico. O escoamento se refere à trajetória que as partículas do fluido seguem à medida que se movem ao longo do espaço, sob a influência desse campo vetorial. A velocidade do escoamento depende da forma e inclinação do leito do rio, assim como da intensidade do campo vetorial em cada ponto. Por isso, o escoamento pode variar entre rápido e lento, fluido e turbulento, e assim por diante, dependendo das condições locais.

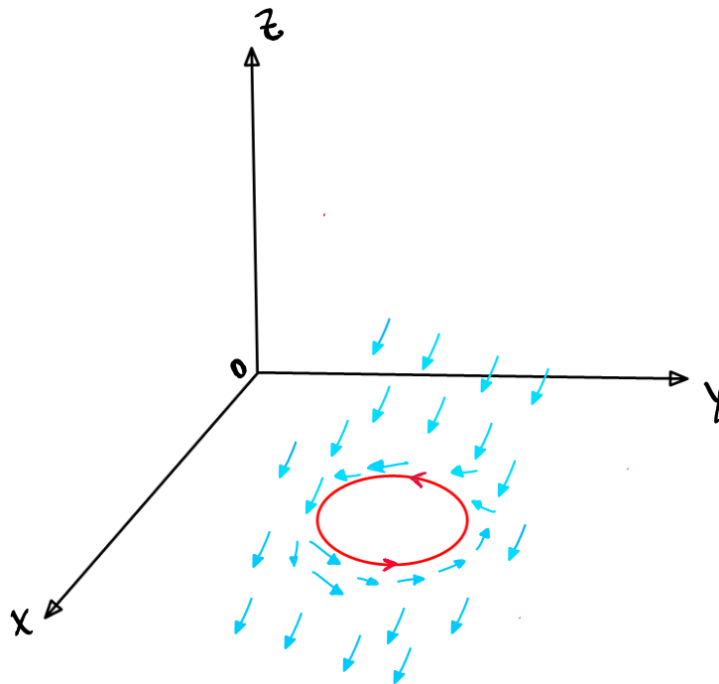
Dessa forma, dado um campo de velocidade de um fluido, se definirmos uma parametrização para o caminho (curva) que estamos analisando, podemos a partir disso determinar o escoamento. Perceba que podemos restringir os intervalos de análise mudando os intervalos da parametrização.

Esse escoamento de que estamos falando, é dado pelo mesma integral que utilizamos para calcular o trabalho anteriormente. Afinal de contas, o próprio escoamento

pode ser entendido como o trabalho exercido por esse campo de velocidade do fluido para mover um objeto de A até B, demos aqui apenas uma nova interpretação para integral, sendo geralmente chamada de integral de escoamento.

É importante salientar, que se a curva em questão for fechada e simples, isto é, fechada, pois ponto inicial e o final são os mesmos, e simples, pois ela não se entrelaça, chamamos a integral que segue de Circulação de F através de C . No exemplo acima podemos imagina um redemoinho uniforme em um rio, e o que estaríamos calculando seria como é a circulação em seu bordo. Observe Figura 20:

Figura 20 – Exemplo de circulação no bordo do redemoinho em um rio.



Fonte: Autor (2023).

Pode ser também que não existe essa curva, ou aproveitando o exemplo anterior, se houvesse um redemoinho no rio, com integral de linha poderíamos calcular a circulação no bordo desse redemoinho, mas pode ser que a água esteja apenas passando, então não haverá circulação ou a circulação será igual a zero. Essa situação poderia ser representada por um campo vetorial que não apresenta convergências em nenhum ponto e todos os vetores apresentam a mesma direção e sentido.

Em rigor matemático, sejam $F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$ é um campo vetorial de velocidade, e a curva parametrizada $C : r(t) = x(t)i + y(t)j$, o escoamento ou circulação ao longo da curva C de $A = r(a)$ até $B = r(b)$ é dado pela equação (4.9):

$$\int_C F \cdot T ds = \int_C F(r(t)) \cdot r'(t) dt \quad (4.9)$$

Exemplo 8 (THOMAS; FINNEY, 1965, p.376) Encontre a circulação do campo $F = (x - y)i + (x)j$ ao redor da circunferência $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)j$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Primeiro como já temos a parametrização da curva, encontraremos sua derivada, assim: $r'(t) = -\sin(t)i + \cos(t)j$. Agora encontremos o valor curva no campo:

$$F = (\cos(t) - \sin(t))i + \cos(t)j$$

Por fim aplicamos a integral:

$$\begin{aligned} \int_C F(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_0^{2\pi} [(\cos(t) - \sin(t)), +\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [1 - \sin(t)\cos(t)] dt \\ &= \left[t - \frac{\sin^2(t)}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Assim, isso significa que a circulação do campo vetorial em torno da circunferência é igual a uma volta completa, ou seja, o campo vetorial circula completamente ao redor da circunferência em questão. Em outras palavras, se um objeto se move em torno da curva sob a influência desse campo vetorial, ele realizará uma rotação completa em torno da circunferência, e a integral de circulação fornece uma medida da quantidade total de trabalho realizado pelo campo vetorial sobre o objeto ao longo da curva fechada.

Exemplo 9 (THOMAS; FINNEY, 1965, p.381) O campo $F = (xy)i + (y)j - (yz)k$ é o campo velocidade de um escoamento no espaço. Encontre o escoamento de $(0,0,0)$ até $(1,1,1)$ ao longo da curva de interseção do cilindro $y = x^2$ e do plano $z = x$.

Em primeiro lugar, devemos saber qual a curva que estamos trabalhando, ela é dada pela interseção entre $y = x^2$ e $z = x$, sendo assim, em seu encontro ela compartilham as mesmas coordenadas, isto é, na interseção os valores das curvas são iguais, sendo assim podemos fazer $y = z^2$, para podermos parametrizar essa curva resultante, podemos chamar $x = t$ o que implica que $z = t$ e conseqüentemente $y = t^2$. Dessa forma, podemos parametrizar C da seguinte forma: $r(t) = (t, t^2, t)$ com $0 \leq t \leq 1$ mesma variação de x pois fizemos $x = t$.

Agora podemos encontrar a derivada da curva e o valor do campo na curva parametrizada, temos respectivamente o seguinte:

$$r'(t) = (1, 2t, 1)$$

e

$$F(r(t)) = (t^3, t^2, -t^3)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_C F(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_0^1 (t^3, t^2, -t^3) \cdot (1, 2t, 1) dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2t^3 - t^3) dt \\ &= \int_0^1 2t^3 dt = 2 \int_0^1 t^3 dt = \left(\frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Agora pratique sozinho.

4.3.1 Exercícios Propostos

Exercício 9 (THOMAS; FINNEY, 1965, p.381) Seja C a elipse na qual o plano $2x + 3y - z = 0$ encontra o cilindro $x^2 + y^2 = 12$. Mostre que a circulação do campo $F = xi + yj + zk$ em torno de C é nula.

Exercício 10 (THOMAS; FINNEY, 1965, p.379) Encontre o escoamento do campo de velocidade $F = (x + y)i - (x^2 + y^2)j$ ao longo do segmento de reta de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$ seguido pelo segmento de reta de $(0, -1)$ a $(-1, 0)$.

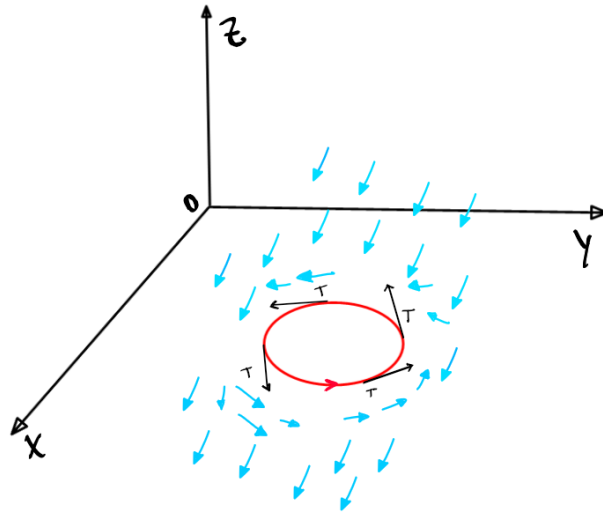
4.4 Fluxo através uma curva plana simples

Quando temos uma curva simples, fechada e plana, ou seja, que não se entrelaça e tem ponto inicial igual ao final. Podemos trabalhar com base nos conceitos que vimos de integral de linha para encontrar uma expressão que nos forneça a grandeza que descreve a taxa na qual um fluido está entrando ou saindo da região determinada e delimitada pela curva simples e fechada C no plano, essa grandeza chamamos de fluxo.

Quando estamos trabalhando com circulação, estamos interessados em calcular o escoamento ao longo da curva, o próprio nome já é bastante sugestivo, mas, quando pensamos no fluxo, estamos interessados em calcular a taxa na qual um fluido está passando pela região delimitada pela curva, ou seja, estamos interessados em calcular o fluxo através da curva e não mais ao longo da curva. É nessa informação que está a chave para o entendimento do fluxo. Se você retornar para a parte de circulação, perceberá que na integral estamos considerando o componente do produto escalar de F na direção do vetor tangente unitário (T) que avança contornando/circulando a curva, observe Figura 21.

Já para o fluxo, precisamos calcular a integral com o componente do produto escalar de F mas na direção do vetor normal exterior, conforme equação dada em (4.10).

Figura 21 – Componente tangencial unitário da circulação.

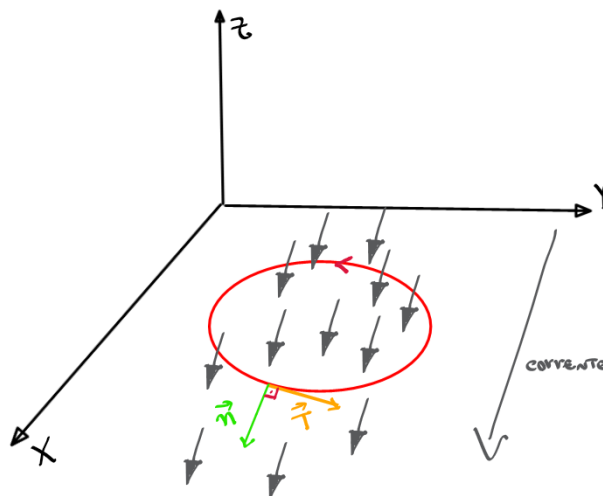


Fonte: Autor (2023).

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \quad (4.10)$$

Peguemos o exemplo do rio. Imagine que a curva da Figura 22 está situada em um rio e delimita a região sombreada, suponha que o rio corra no sentido indicado (nesse exemplo podemos pensar o campo vetorial como o campo de velocidade da corrente do rio), para calcularmos o fluxo da água através dessa curva, isto é, a taxa na qual a água está saindo com relação a que está entrando, precisamos considerar o sentido perpendicular da água que passa pela curva, e esse sentido é dado pelo vetor normal unitário. Mas, é natural aparecer a seguinte dúvida: como encontrar esse vetor normal unitário?

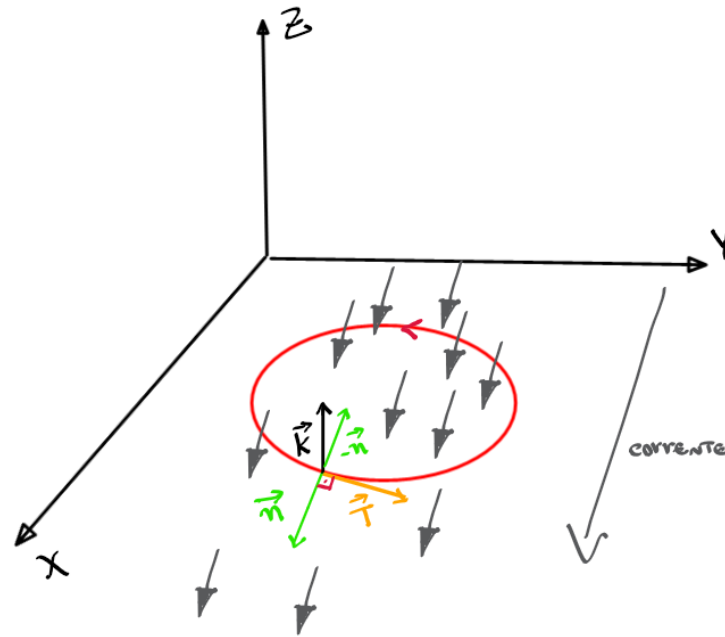
Figura 22 – Exemplo de curva situada em um rio.



Fonte: Autor (2023).

Sabemos calcular a tangente normal unitária por surgir de um processo relativamente simples de derivação. O vetor normal unitário é encontrado por meio do produto vetorial do vetor tangente unitário T com o vetor unitário k da base canônica, utilizamos o vetor k porque como a curva é plana, e geralmente consideramos ela no plano xy , naturalmente temos um vetor ortogonal a esse plano, sendo o vetor k . Se lembrar bem das aulas de geometria analítica, recordará que o resultado de um produto vetorial também é um vetor que é perpendicular, simultaneamente, aos dois vetores do produto, ou seja, na situação temos $T \times k$ ou $k \times T$, como mostra Figura 23.

Figura 23 – Representação gráfica dos casos do vetor normal dado por $T \times k$ ou $k \times T$.



Fonte: Autor (2023).

Assim, chamamos de n o vetor normal unitário e ele é igual a:

$$n = T \times k$$

ou

$$-n = k \times T$$

Note que temos duas opções para o vetor normal unitário, por norma devemos admitir que as curvas são orientadas no sentido anti-horário, pois assim teremos o normal exterior, caso contrário, teríamos o interior que não nos interessa.

Observação 4 Isso pode ser entendido pela regra da mão direita na hora do cálculo do produto vetorial entre T e k . Fica como exercício para o leitor perceber essa diferença.

Diante da escolha do sentido anti-horário, vamos considerar $n = T \times k$, Portanto, conseguimos chegar a uma expressão para n :

$$n = T \times k = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, 0 \right) X(0, 0, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Logo, resolvendo o determinante por métodos como a regra de Sarrus que se aprende no ensino médio, chegamos que:

$$n = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

Na expressão da integral de linha temos que:

$$\begin{aligned} F \cdot n &= (P(x, y), Q(x, y)) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) \\ F \cdot n &= P(x, y) \frac{dy}{ds} - Q(x, y) \frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot n ds &= \oint_C \left(P(x, y) \frac{dy}{ds} - Q(x, y) \frac{dx}{ds} \right) ds \\ \int_C F \cdot n ds &= \oint_C P dy - Q dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

A “bolinha” ao redor da integral é apenas para lembrar de que a integração se dá ao redor de uma curva fechada e orientada em sentido anti-horário.

Observação 5 *Essa notação também é válida para as integrais de circulação.*

Exercício 11 (*THOMAS; FINNEY, 1965, p. 376*) Encontre o fluxo do campo $F = (x - y)i + (x)j$ através da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy .

Para a resolução dos problemas que envolvem fluxo, podemos proceder de 2 formas.

1º forma

Primeiro vamos encontrar uma parametrização para a curva, tomando o cuidado para que ela seja percorrida ou descrita no sentido anti-horário. Para a circunferência já estamos habituados a sua parametrização que é $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)j$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ dessa forma ela é percorrida no sentido anti-horário ao seguir o sentido crescente e positivo do ciclo trigonométrico.

Agora, encontraremos o vetor normal unitário para então substituir em $\int_C F \cdot nds$, assim:

$$n = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

Quando vimos o comprimento de arco de uma curva parametrizada chegamos a conclusão que $ds = |r'(t)|dt$, ou seja, o diferencial de arco é igual ao módulo da derivada do vetor que descreve a curva, logo precisamos da derivada de $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)j$ e em seguida se seu módulo:

$$r'(t) = -\sin(t)i + \cos(t)j$$

e

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

Portanto, $ds = 1dt$. Perceba também que precisaremos de dx e dy que são as derivadas dos componentes da curva, do componente x ($\cos(t)$) e componente de y ($\sin(t)$), respectivamente, logo:

$$n = \left(\frac{\cos(t)dt}{dt}, -\frac{-\sin(t)dt}{dt} \right) = (\cos(t), \sin(t))$$

Observação 6 Note que simplificamos dt .

Portanto, o fluxo será dado por:

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot nds &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot n \cdot |r'(t)|dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(t) - \sin(t), \cos(t)) \cdot (\cos(t), \sin(t)) \cdot 1dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) - \sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2}dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi \end{aligned}$$

Dado que a resposta é positiva, podemos concluir que o escoamento líquido é para fora da curva, caso contrário, seria para dentro.

A **2ª forma** considera a expressão $\oint_C Pdy - Qdx$, a grande vantagem está no fato de que não precisamos calcular n e muito menos ds . Veja.

Igual a 1ª forma também teremos que encontrar a parametrização, como já fizemos vamos apenas aproveitar o resultado. Para a circunferência sua parametrização é $r(t) = \cos(t)i + \sin(t)j$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ dessa forma ela é percorrida no sentido anti-horário ao seguir o sentido crescente e positivo do ciclo trigonométrico.

Do campo $F = (x - y)i + (x)j$ temos que $P = x - y$ e, portanto, $P(r(t)) = \cos(t) - \sin(t)$ e que $Q = x$ e, portanto, $P(r(t)) = \cos(t)$ já calculando $F(r(t))$. Então da expressão $\oint_C Pdy - Qdx$ já temos P e Q falta dy e dx , logo:

$$dy = \cos(t)dt$$

e

$$dx = -\sin(t)dt$$

Agora substituindo, encontramos:

$$\begin{aligned}\oint_C Pdy - Qdx &= \int_0^{2\pi} (\cos(t) - \sin(t))\cos(t)dt - (\cos(t)(-\sin(t)dt)) \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) - \sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2}dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi\end{aligned}$$

Agora pratique sozinho.

4.4.1 Exercícios Propostos

Exercício 12 Encontre o fluxo exterior do campo $F = (x + y)i - (x^2 + y^2)j$, através do triângulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ e $(-1,0)$.

Exercício 13 Encontre o fluxo para o campo $F = (x^2 + 4y)i + (x + y^2)j$ através do quadrado limitada por $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=1$.

Exercício 14 Seja o campo F dado por $F(x, y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^5} \right) i + \left(\frac{y}{(x^2+y^2)^5} \right) j$ e n a normal unitária exterior ao círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Determine o fluxo através de $C = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

5 TEOREMA DE GREEN

Veremos a seguir um teorema muito útil em diversas situações, que, por conta de sua praticidade, caso suas condições sejam satisfeitas, reduz consideravelmente os cálculos e nos permite chegar a resultados que até então exigiam um certo tempo e um considerável trabalho de escrita até o resultado.

O Teorema de Green fornece uma relação direta de integral de linha ao longo de uma curva simples e fechada com a integral dupla sobre a região que a curva delimita. Você deve estar se questionando se esse teorema é tão útil como foi enunciado, pois a princípio pode parecer que apenas complicou a situação, trocamos uma integral simples para uma integral dupla. Mas, muito pelo contrário, apesar de termos que relembrar os conceitos acerca de integral dupla, você perceberá que não será mais necessário parametrizar a curva que por vezes era muito trabalhosa ou praticamente inviável, e isso é uma grande vantagem. O teorema de Green também é benéfico no que diz respeito as aplicações de integral de linha, como circulação e fluxo.

De acordo com (STEWART, 2006), temos que:

Definição 2 *Seja C uma curva plana simples, fechada e orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q possuem derivadas parciais contínuas sobre a região aberta que contenha D , então:*

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (5.1)$$

Observação 7 *Temos na definição que P e Q são as funções componentes do campo vetorial dado por $F = Pi + Qj$ e que $\frac{\partial Q}{\partial x}$ indica a derivada parcial de Q em relação à variável x , da mesma forma $\frac{\partial P}{\partial y}$ indica a derivada parcial de P em relação à variável y . Além disso, quando é dito que a curva é orientada positivamente, é o mesmo que dizer que ao percorrer a curva, a região de interesse que essa curva delimita deve sempre estar à esquerda. Caso a orientação das curvas não sejam dadas no exercício você deve assumir o sentido positivo, e caso a orientação dada seja a no sentido negativo (sentido horário), você deve trocar o sinal ao final do resultado, pois o resultado do teorema de Green considera a orientação no sentido anti-horário, quando calculamos a integral dupla não considera nos cálculos a orientação, mas, subentende-se que é a positiva.*

Vale lembrar que as igualdades em (5.2) são equivalentes.

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_C F \cdot T ds = \oint_C F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (5.2)$$

Como trabalharemos com integral dupla, para demonstrar o teorema, será de grande valia lembrarmos o teorema de Fubini para regiões do tipo I e do tipo II, pois a demonstração precisaremos analisar por partes.

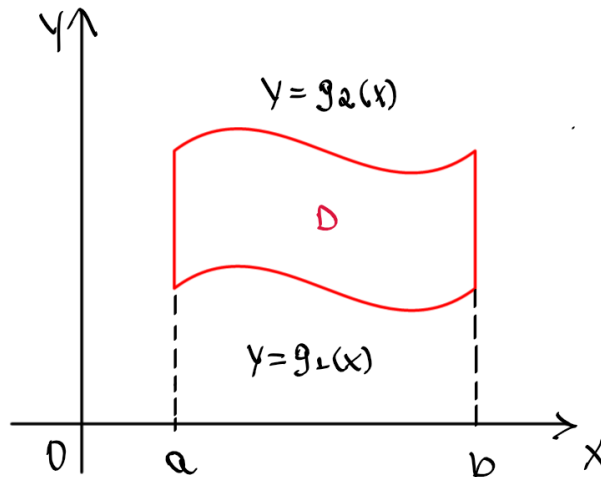
Para regiões do tipo I:

Teorema 1 *Seja $f(x, y)$ contínua em uma região D . Se D for definida por $a \leq x \leq b$ e $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, com g_1 e g_2 contínuas em $[a, b]$, então*

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Graficamente temos a situação descrita na Figura 24.

Figura 24 – Região do Tipo I



Fonte: Autor (2023).

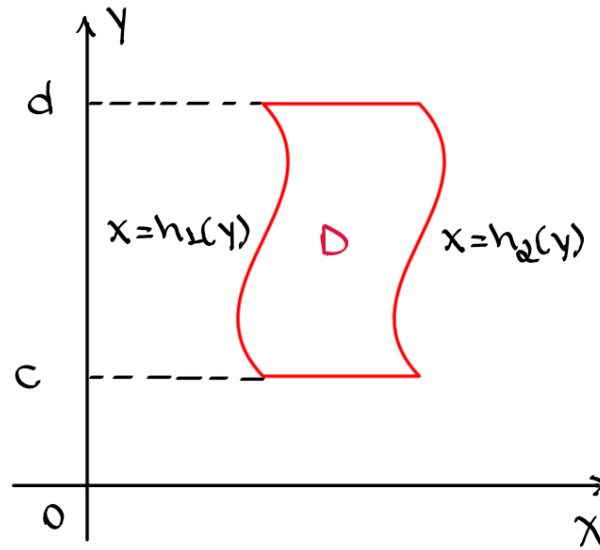
Para regiões do tipo II:

Teorema 2 *Seja $f(x, y)$ contínua em uma região D . Se D for definida por $c \leq y \leq d$ e $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, com h_1 e h_2 contínuas em $[c, d]$, então:*

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Graficamente temos a seguinte situação dada na Figura 25.

Figura 25 – Região do Tipo II



Fonte: Autor (2023).

O teorema de Fubini apresentado nas suas duas formas considera as regiões simples, isto é, aquelas regiões onde x varia em um intervalo numérico ($a \leq x \leq b$) e y varia entre duas funções ($g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$), para regiões do tipo I, e para regiões do tipo II os papéis se invertem, y varia em um intervalo numérico ($c \leq y \leq d$) e x varia entre duas funções ($h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$). A demonstração que seguirá do teorema de Green, levará em a região D uma região simples. Caso a região não seja uma região simples como as apresentadas, você deverá dividir a região em parte, aonde cada parte é uma região simples.

Para demonstrar o teorema devemos provar a igualdade

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

1º reescreveremos os membros da igualdade, perceba que em ambos os lados temos a soma de duas integrais, veja em (5.3).

$$\oint_C Pdx + \oint_C Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (5.3)$$

Assim, se mostrarmos que

$$\oint_C Pdx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (5.4)$$

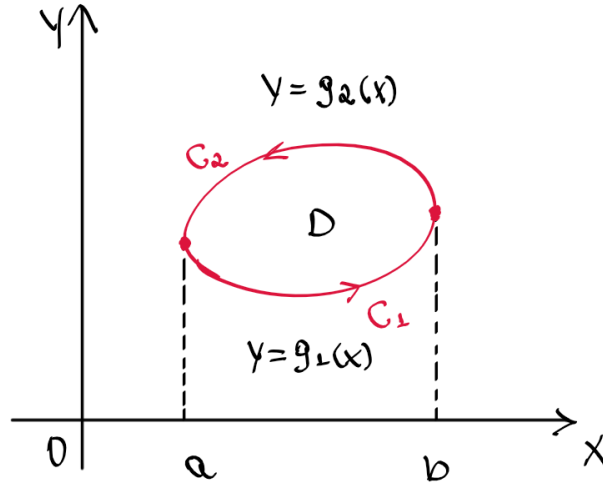
e

$$\oint_C Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dA \quad (5.5)$$

Teremos demonstrado a validade do teorema de Green.

Dessa forma, consideremos (5.4). Que diz que a integral da componente x do campo é igual integral dupla da derivada de P em relação a y sobre a região D . Assumamos que D é uma região simples do tipo I, como segue a Figura 26:

Figura 26 – Demonstração — teorema de Green (região — tipo I)



Fonte: Autor (2023).

Dividimos C em duas curvas C_1 e C_2 , assim sobre a região D sabemos que

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ C = C_1 \cup C_2 \end{cases}$$

Vamos calcular $\oint_C Pdx$, mas lembrando que $C = C_1 \cup C_2$, assim:

$$\oint_{C=C_1 \cup C_2} Pdx = \oint_{C=C_1} Pdx + \oint_{C_2} Pdx$$

Para calcular cada uma dessas integrais de linha, precisaremos da parametrização de C_1 e de C_2 . Observe que C_1 e C_2 são arcos de uma função então a parametrização mais simples será: $C_1 : r_1(x) = (x, y = g_1(x))$, com $a \leq x \leq b$. Logo,

$$\oint_{C_1} Pdx = \int_a^b P(x, y)dx = \int_a^b P(x, g_1(x))dx$$

analogamente faremos com C_2 : $C_2 : r_2(x) = (x, y = g_2(x))$, com $b \leq x \leq a$. Logo,

$$\oint_{C_2} Pdx = \int_b^a P(x, y)dx = \int_b^a P(x, g_2(x))dx$$

Perceba que, como estamos percorrendo C no sentido anti-horário, em C_2 estamos indo de b para a , por isso na parametrização de C_2 a variação de x ficou sendo $b \leq x \leq a$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \oint_{C=C_1 \cup C_2} P dx &= \int_{C=C_1} P dx + \int_{C_2} P dx \\
 &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx + \int_b^a P(x, g_2(x)) dx \\
 &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \\
 \oint_{C=C_1 \cup C_2} P dx &= - \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx
 \end{aligned}$$

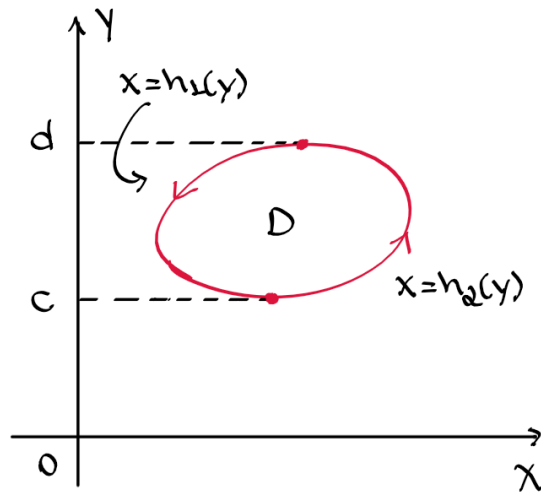
Agora observe que da forma como está escrito a integral, podemos manipulá-la e escrever da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \oint_{C=C_1 \cup C_2} P dx &= - \int_a^b P(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} \\
 &= - \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy
 \end{aligned}$$

$$\oint_{C=C_1 \cup C_2} P dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (5.6)$$

Observe que o resultado que chegamos em (5.6) é exatamente o que queríamos provar em (5.4). De forma análoga ao que acabamos de fazer, para (5.7) podemos fazer agora a mesma região D uma região simples do tipo II, como mostra a Figura 27:

Figura 27 – Demonstração — teorema de Green (região – tipo II)



Fonte: Autor (2023).

A curva C também deverá ser dividida em $C = C_1 \cup C_2$, e sobre D será sabido que:

$$\begin{cases} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \\ C = C_1 \cup C_2 \end{cases}$$

Seguindo os mesmo passos, você chegará ao seguinte resultado

$$\oint_{C=C_1 \cup C_2} Q dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dA \quad (5.7)$$

Portanto, somando os resultados de (5.4) e (5.7), temos o teorema de Green como enunciado:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Fica como exercício para o leitor, demonstrar a igualdade $\oint_C Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dA$.

Exemplo 10 Calcule a integral de linha $I = \int_C (2y + \sqrt{1+x^5}) dx + (5x - e^{y^2}) dy$ sobre a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

Se fossemos calcular essa integral sem utilizar o teorema de Green, faríamos da seguinte forma:

Primeiro teríamos que parametrizar C o que nesse exercício é tranquilo, pois se trata de uma circunferência, assim uma parametrização seria $C : r(t) = (cost, sent)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, assim $r'(t) = (-sent, cost)$ e $F(r(t)) = (2sent + \sqrt{1+cos^5t}, 5cost - e^{sen^2t})$. Assim,

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} [(2sent + \sqrt{1+cos^5t}, 5cost - e^{sen^2t})] \cdot [(-sent, cost)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2sen^2t - \sqrt{1+cos^5t}sent + 5cos^2t - e^{sen^2t}cost) dt \end{aligned}$$

Não vamos sequer continuar o desenvolvimento dessa integral, você já deve ter percebido o trabalho que essa integral nos trará. Por outro lado, utilizando o teorema de Green, ficará da seguinte forma:

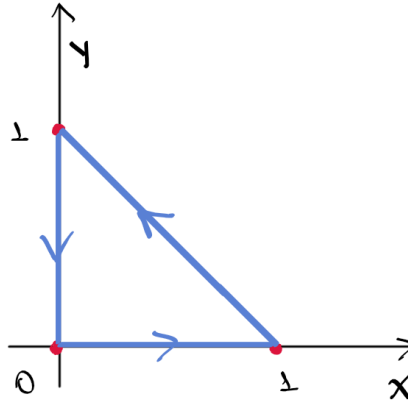
$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_D \left(\frac{\partial(5x - e^{y^2})}{\partial x} - \frac{\partial(2y + \sqrt{1+x^5})}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (5 - 2) dA \\ &= 3 \iint_D dA = 3\pi \end{aligned}$$

Como ficamos com a integral da função constante $f(x, y) = 1$ o valor da integral dupla é numericamente igual à área da região D que é uma circunferência de raio 1 e, portanto, sua área é igual a π .

Exemplo 11 Calcule $\oint_C -ydx + x^2dy$ onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, orientado positivamente.

Em primeiro lugar devemos nos certificar que a curva dada é uma curva fechada, no exercício fica claro por se tratar de um triângulo. Agora, faremos o gráfico da situação conforme Figura 28:

Figura 28 – Gráfico exemplo 10



Fonte: Autor (2023).

A região em questão pode ser classificada do tipo I, ou seja, x está variando entre números e y está variando entre duas funções. Para x é fácil de perceber a variação, $0 \leq x \leq 1$. Para y podemos notar que seus valores de estão indo do eixo x , ou melhor, dizendo, de $y = 0$ até o segmento de reta que forma o lado do triângulo. Esse segmento de reta é igual a $y = 1 - x$ (para encontrar essa equação da reta basta utilizar conceitos básicos de geometria analítica já que dois pontos da reta foram dados). Assim, $0 \leq y \leq 1 - x$. Como já temos as variações de x e de y aplicaremos o teorema de Green. Assim,

$$\begin{aligned}
 \oint_C -ydx + x^2dy &= \iint_D \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right] dA \\
 &= \iint_D (2x + 1) dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x + 1) dy dx \\
 &= \int_0^1 (2xy + y) \Big|_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 2x(1-x) + (1-x) dx \\
 &= \int_0^1 (-2x^2 + x + 1) dx \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

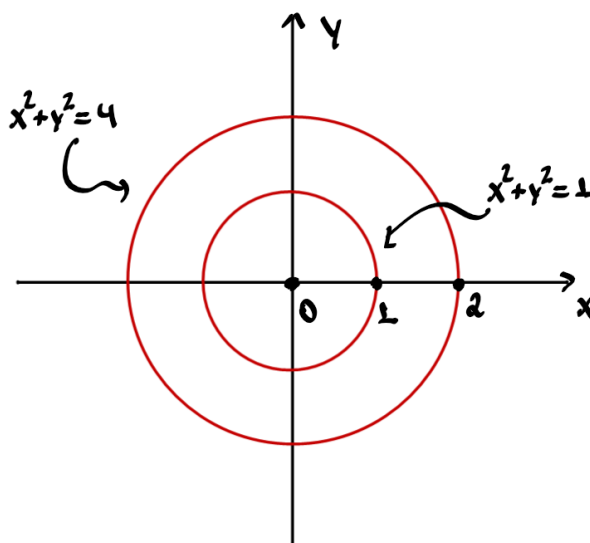
Perceba que se não tivéssemos usado o teorema de Green, teríamos que calcular 3 integrais de linha, uma para cada lado do triângulo e, para isso, teríamos que encontrar suas parametrizações em cada situação.

O teorema de Green, apesar de ter sido demonstrado para regiões simples (tipo I e II, de acordo com Fubini), ele também pode ser utilizado para calcular a integral em regiões que dizemos que não são simplesmente conexas. Mas o que é uma região simplesmente conexa? Até aqui você vem utilizando esse conceito de forma implícita, ainda não havíamos conceituado. Mas, uma região simplesmente conexa pode ser definida usualmente como uma região que não possui buracos e não é formada por duas regiões separadas, matematicamente dizemos que uma região é simplesmente conexa se toda e qualquer curva fechada e simples na região possui apenas os pontos na região. Assim, quando enunciamos o teorema de Green e o demonstramos considerando regiões do tipo I e II, as quais são regiões simplesmente conexas, estávamos pensando em regiões sem buracos ou que não são compostas por duas partes separadas, pois regiões que possuem essa característica são formadas pela delimitação de uma única curva, por mais complexa que ela seja. Mas, o teorema de Green também pode ser utilizado para regiões que não são simplesmente conexas. Observe o exemplo.

Exemplo 12 (STEWART, 2006, p.976) Calcule $\oint_C (xe^{-2x})dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy$, onde C é o limite da região D entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Em primeiro lugar esboçaremos o gráfico, observe Figura 29:

Figura 29 – Gráfico exemplo 11

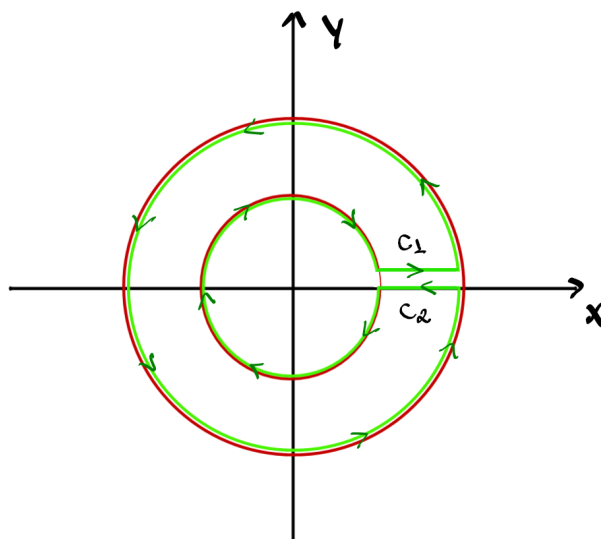


Fonte: Autor (2023).

Observe que a região não se trata de uma região do tipo I ou II, se trata de uma coroa circular, a região completa que $x^2 + y^2 = 4$ delimita não é simplesmente conexa,

por existir a parte interior a curva $x^2 + y^2 = 1$ que não pertence a coroa circular e não nos interessa, logo, não se pode aplicar o teorema de Green nessa região, mas, fazendo um corte na região, apenas um corte, assim como mostra a Figura 30, e contornando de modo que as duas curvas, inicialmente sem interseção, se conectem formando uma única curva onde a região à esquerda é simplesmente conexa, fazendo isso podemos provar que o cálculo da integral de linha pode ser efetuado através do teorema de Green.

Figura 30 – Gráfico exemplo 11 (corte)



Fonte: Autor (2023).

Note que a medida que contornamos a curva a partir de C_1 no sentido anti-horário, a região está sempre à esquerda. É importante destacar que C_1 e C_2 são, na verdade, a mesma curva representando o mesmo corte, foram esboçadas separadas apenas para ilustrar o caminho de saída em C_1 e o de chegada em C_2 . Ao final do contorno como o ilustrado na Figura 30 temos como resultado uma região simplesmente conexa, onde podemos aplicar o teorema de Green. Assim, o teorema de Green também pode ser aplicado para regiões que não são simplesmente conexas, através dessa “manobra” apresentada. Note também que, para que pudéssemos realizar essa “manobra”, a circunferência exterior deve estar com orientação positiva (sentido anti-horário) enquanto a circunferência interior deve estar com orientação negativa (sentido horário) para que quando for feito o corte, as curvas possam ser percorridas de forma que a região esteja à esquerda e a nova curva (representada em verde na Figura 30) que delimita a nova região seja orientada positivamente, obedecendo assim as condições do teorema de Green.

Tendo dito isso, vamos para a resolução do exercício. Perceba que se formos tentar utilizar o teorema de Green calculando as integrais com coordenadas cartesianas será muito mais difícil, assim encontraremos a região dada em coordenadas polares. Logo, $D = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ e $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

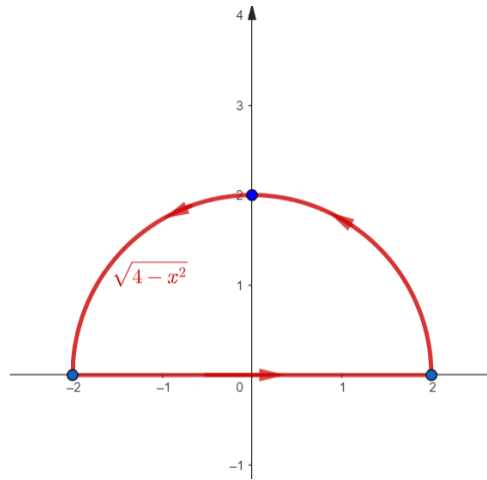
Assim, consoante o teorema de Green temos que:

$$\begin{aligned}
 \oint_C (xe^{-2x})dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy &= \iint_D \left[\frac{\partial(x^4 + 2x^2y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xe^{-2x})}{\partial y} \right] dA \\
 &= \iint_D (4x^3 + 4xy^2) dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (4(r\cos\theta)^3 + 4(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (4r^3\cos^3\theta + 4r^3\cos\theta\sin^2\theta) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 4r^3\cos\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (4r^4\cos\theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{4r^5}{5} \cos\theta \Big|_1^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{4(2)^5}{5} \cos\theta - \frac{4(1)^5}{5} \cos\theta d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{128}{5} \cos\theta - \frac{4}{5} \cos\theta d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{124}{5} \cos\theta d\theta = \frac{124}{5} \left[\sin\theta \Big|_0^{2\pi} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Exemplo 13 (STEWART, 2006, p.976) Uma partícula inicialmente no ponto $(-2,0)$ se move ao longo do eixo x para $(2,0)$, e então ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $F(x,y) = xi + (x^3 + 3xy^2)j$.

Perceba, observando na Figura 31 o gráfico da situação, que o movimento da partícula ocorre no sentido positivo, isto é, no sentido anti-horário, ao passo que percorremos a curva seguindo as orientações do exercício, e região delimitada está sempre a esquerda. Novamente, se fôssemos utilizar a integral de linha teríamos que parametrizar ambos os caminhos e aplicar a integral em cada um, mas, utilizando o teorema de green, teremos o seguinte:

Figura 31 – Gráfico exemplo 12



Fonte: Autor (2023).

$$\begin{aligned}
 \oint_C x dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \iint_D \left[\frac{\partial(x^3 + 3xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y} \right] dA \\
 &= \iint_D (3x^2 + 3y^2) - 0 dA \\
 &= \iint_D (3x^2 + 3y^2) dA \\
 &= \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (3x^2 + 3y^2) dy dx
 \end{aligned}$$

Note que na integral dupla y varia entre 0 e $\sqrt{4-x^2}$, na hora de resolvermos, poderá ser um problema, então vamos converter para coordenadas polares, assim, como $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ e $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ temos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (3x^2 + 3y^2) dy dx &= \int_0^\pi \int_0^2 (3r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^2 3r^3 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^2 3r^3 dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left. \frac{3r^4}{4} \right|_0^2 d\theta \\
 &= \int_0^\pi 12 d\theta = 12\theta \Big|_0^\pi = 12\pi
 \end{aligned}$$

Portando o trabalho é igual a 12π .

Da mesma forma que acabamos de utilizar o teorema de Green para calcular o trabalho realizado por um campo de força para mover uma partícula de um ponto até outro ao longo de um caminho fechado, também podemos utilizar o teorema de green em

outras aplicações da integral de linha, como, por exemplo, para calcular a circulação e o fluxo. No caso especial do fluxo, teremos apenas um ajuste na fórmula do teorema, ficando da seguinte forma:

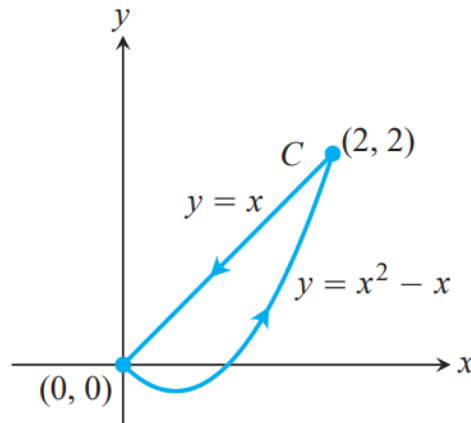
$$\int_C F \cdot n ds = \oint_C P dy + Q dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

Para a circulação, continuamos com fórmula já apresentada do teorema de Green, a mesma que usamos para calcular o trabalho. Veja a aplicação em um exercício.

Exemplo 14 (THOMAS; FINNEY, 1965, p.401) *Determine a circulação em sentido anti-horário e o fluxo exterior para o campo $F(x, y) = x^3 y^2 i + \frac{1}{2} x^4 y j$ e a curva C dada pela união da parte da parábola $y = x^2 - x$ de $(0, 0)$ a $(2, 2)$ com a reta $y = x$ de $(2, 2)$ a $(0, 0)$.*

Primeiro calcularemos a circulação. Na Figura 32 temos o esboço do gráfico.

Figura 32 – Gráfico exemplo 13



Fonte: Thomas (1965).

Vemos que a curva está sendo percorrida no sentido positivo, logo pelo teorema de Green, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C (x^3 y^2) dx + \left(\frac{1}{2} x^4 y \right) dy &= \iint_D \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{2} x^4 y \right)}{\partial x} - \frac{\partial (x^3 y^2)}{\partial y} \right] dA \\ &= \iint_D (2x^3 y - 2x^3 y) dA \\ &= \iint_D 0 dA = 0 \end{aligned}$$

Portanto a circulação ao longo de C é nula. Para o fluxo exterior, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C (x^3 y^2) dy - \left(\frac{1}{2} x^4 y \right) dx &= \iint_D \left[\frac{\partial (x^3 y^2)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{1}{2} x^4 y \right)}{\partial y} \right] dA \\ &= \iint_D \left(3x^2 y^2 + \frac{x^4}{2} \right) dA \end{aligned}$$

Através do enunciado e da Figura 32, podemos concluir as variações de x e y :
 $0 \leq x \leq 2$ e $x^2 - x \leq y \leq x$, logo:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \left(3x^2y^2 + \frac{x^4}{2} \right) dA &= \int_0^2 \int_{x^2-x}^x \left(3x^2y^2 + \frac{x^4}{2} \right) dy dx \\
 &= \int_0^2 \left(x^2y^3 + \frac{x^4y}{2} \right) \Big|_{x^2-x}^x dx \\
 &= \int_0^2 \left(x^2x^3 + \frac{x^4x}{2} - x^2(x^2-x)^3 - \frac{x^4(x^2-x)}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^2 \left(-x^8 + 3x^7 + 3x^5 - \frac{7}{2}x^6 \right) dx \\
 &= \left(-\frac{x^9}{9} + \frac{3}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^7 \right) \Big|_0^2 \\
 &= \left(-\frac{512}{9} + 36 + 32 + 64 \right) = \frac{64}{9}
 \end{aligned}$$

Portanto, o fluxo exterior através de C é igual a $\frac{64}{9}$.

Agora pratique sozinho.

5.0.1 Exercícios propostos

Exercício 15 (STEWART, 2006, p. 976) (Adaptada) Determine a integral de linha, através de dois métodos (pela definição e pelo teorema de Green), do campo $F = (y + e^{\sqrt{x}})i + (2x + \cos y^2)j$ ao longo da curva que delimita a região D entre as parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Exercício 16 Verifique o teorema de Green com o campo $F = (3y, 1)$, e λ o caminho cuja imagem é a fronteira positivamente orientada da região interior ao círculo $x^2 + y^2 = 25$, e exterior aos 4 círculos de raio 1 e centros em $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,2)$ e $(0,-2)$.

Exercício 17 (THOMAS; FINNEY, 1965, p.402) Encontre a circulação em sentido anti-horário e o fluxo exterior para o campo $F = (\arctg \frac{y}{x})i + \ln(x^2 + y^2)$ sendo C a fronteira da região definida pelas desigualdades em coordenadas polares $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \pi$.

Exercício 18 (THOMAS; FINNEY, 1965, p.402) Encontre a circulação em sentido anti-horário de $F = (y + e^x \ln y)i + \left(\frac{e^x}{y}\right)j$ ao redor da fronteira delimitada superiormente pela curva $y = 3 - x^3$ e inferiormente pela curva $y = x^4 + 1$.

Exercício 19 (THOMAS; FINNEY, 1965, p.402) Encontre o fluxo exterior do campo $F = \left(3xy - \frac{x}{1+y^2}\right)i + (e^x + tg^{-1}y)j$ através da cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando as dificuldades encontradas no ensino de cálculo diferencial e integral, é necessário buscar abordagens e métodos que aprimorem a educação nessa área. A pandemia da Covid-19 acelerou a adoção do ensino remoto e híbrido, resultando em desafios adicionais para educadores e estudantes. A falta de estrutura adequada e a qualidade do ensino foram evidenciadas, assim como a responsabilidade e autonomia atribuídas aos alunos nesse contexto. Foi nesse sentido que este trabalho foi feito.

Buscamos através das trilhas de aprendizagem apresentar uma ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem de integral de linha e teorema de Green, visando suprir muitas dificuldades e preencher lacunas no aprendizado de cálculo, em especial, cálculo vetorial. Analisamos os possíveis benefícios dessas trilhas no contexto do ensino remoto e híbrido, bem como em um cenário pós-pandêmico. O objetivo principal foi fornecer orientações para os professores utilizarem essa abordagem eficazmente, promovendo uma aprendizagem significativa e envolvente.

Encontramos nas trilhas a forma de materializar nosso objetivo, pois elas surgem como uma estratégia eficiente para superar tais dificuldades. Proporcionando um percurso estruturado e completo, essas trilhas permitem que os alunos progridam autonomamente, respeitando seu ritmo e conhecimento. Além disso, permitem que os professores personalizem o ensino, despertando a curiosidade e estabelecendo conexões com a realidade dos alunos.

Para alcançar tal objetivo, foi desenvolvido um material abordando teoremas, definições, exemplos e aplicações, oferecendo aos estudantes a oportunidade de visualizar a dinâmica do cálculo vetorial de diferentes perspectivas, incentivando-os a compreender a origem, a demonstração e as aplicações desse conceito. Por meio de explicações analíticas e gráficas, demonstrações passo a passo das equações, análise e interpretação de resultados físicos, juntamente com exercícios resolvidos e outros propostos ao final de cada conteúdo, os alunos são estimulados a refletir sobre o conteúdo e desenvolver um domínio sólido da matéria.

A disponibilização das trilhas por meio de plataformas online permite o acesso aos conteúdos a qualquer momento e em qualquer lugar, contribuindo para a continuidade do processo educacional, mesmo em situações adversas, e auxiliando na superação de defasagens de aprendizagem acumuladas durante o período de ensino remoto.

Embora as trilhas tenham muitas vantagens, o seu uso efetivo de forma alguma dispensa o acompanhamento e a orientação dos professores. Muito pelo contrário, eles desempenham um papel crucial na seleção, criação e adaptação das trilhas, além de

fornecerem suporte aos alunos.

Por fim, como este trabalho se trata de uma pesquisa aplicada, tendo como resultado um produto, ele está disponível para ser testado e aplicado onde quer o conteúdo aqui abordado seja objeto de estudo, podendo ser usado como uma proposta complementar, como um material para discussão, como material base, como um método avaliativo, como atividade assíncrona, entre outros.

Referências

- AVELINO, W. F.; MENDES, J. G. A realidade da educação brasileira a partir da covid-19. *Boletim de Conjuntura (BOCA)*, v. 2, n. 5, p. 56–62, 2020.
- BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. [S.l.]: Penso Editora, 2018.
- DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. [S.l.]: editora Livraria da Física, 2009.
- HALLAL, R. et al. O ensino de matemática e o software geogebra: apresentando potencialidades dessa relação como recurso para o ensino de derivada. *Revista ESPACIOS. ISSN*, v. 798, p. 1015, 2020.
- KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. [S.l.]: Papirus editora, 2003.
- MALTEMPI, M. V.; MENDES, R. d. O. Tecnologias digitais na sala de aula: por que não. In: UNIVERSIDADE DE LISBOA LISBOA. *CONGRESSO INTERNACIONAL DAS TIC NA EDUCAÇÃO*. [S.l.], 2016. v. 4, p. 86–96.
- MARTINS, R. X. A covid-19 e o fim da educação a distância: um ensaio. *EmRede-Revista de Educação a Distância*, v. 7, n. 1, p. 242–256, 2020.
- MORAES, U. C. de et al. Projeto pré-cálculo: reforço matemático para os cursos de engenharia em trilhas de aprendizagem do ensino híbrido/pre-calculus project: mathematical reinforcement for engineering courses in blended teaching-learning tracks. *Brazilian Applied Science Review*, v. 3, n. 1, p. 269–281, 2019.
- MOREIRA, J. A.; HENRIQUES, S.; BARROS, D. M. V. Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. *Dialogia*, Universidade Nove de Julho (UNINOVE), p. 351–364, 2020.
- NASCIMENTO, K. et al. Análise do índice de reprovação e evasão na disciplina de cálculo diferencial e integral i da ufcg–cuieté. *Anais III CONAPESC*, v. 1, 2018.
- SILVA, P. F. da. O uso das tecnologias digitais como ferramentas cognitivas. *RENOTE*, v. 17, n. 2, p. 76–86, 2019.
- STEWART, J. *cálculo*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B.; FINNEY, R. *Cálculo*. [S.l.]: Livros Tecnicos e Científicos, 1965.
- VALENTE, G. S. C. et al. O ensino remoto frente às exigências do contexto de pandemia: Reflexões sobre a prática docente. *Research, Society and Development*, v. 9, n. 9, p. e843998153–e843998153, 2020.