



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO  
TOCANTINS  
CAMPUS PALMAS  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**JANAINA PEREIRA ALVES SOARES**

**MATERIAL MANIPULÁVEL COMO FERRAMENTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM  
DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

**Palmas  
OUTUBRO/2020**

**JANAINA PEREIRA ALVES SOARES**

**MATERIAL MANIPULÁVEL COMO FERRAMENTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM  
DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, *Campus* Palmas, como parte das exigências para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a orientação da Professora Mirelle da Silva Freitas.

**Palmas  
OUTUBRO/2020**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins**

---

S676m Soares, Janaina Pereira Alves  
Material Manipulável como Ferramenta de Ensino- Aprendizagem  
de Matemática no Ensino Fundamental / Janaina Pereira Alves  
Soares. – Palmas, TO, 2020.  
77 p. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins,  
Campus Palmas, Palmas, TO, 2020.

Orientadora: Dra. Mirelle da Silva Freitas

1. Materiais manipuláveis. 2. Ensino aprendizagem de  
Matemática. 3. Ensino Fundamental. I. Freitas, Mirelle da Silva. II.  
Título.

**CDD 510**

---

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins  
de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a).**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO  
TOCANTINS  
CAMPUS PALMAS  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

TÍTULO: Material Manipulável como Ferramenta de Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental

AUTOR: Janaína Pereira Alves Soares

ORIENTADOR: Mirelle da Silva Freitas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, *Campus Palmas*, como parte das exigências para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

*Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mirelle da Silva Freitas*  
*IFTO*

*Prof. Me. Edson Luiz Kraemer*  
*IFTO*

*Prof. Me. Magno Márcio de Azevedo*  
*IFTO*

Dedico este trabalho ao meu esposo Junior a minhas filhas Julia e Sophia à minhas mães Antonia e Eliene e meus irmãos Francisco, Francisca, Antonia, Ana, M<sup>a</sup>. Da luz, França, Sebastião e Silvio.

## AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do IFTO- Campus Palmas, que ao longo dessa jornada acadêmica possibilitaram oportunidade de desenvolver amplas habilidades.

Em especial aos professores. Ao Prof<sup>o</sup>. Mestre Magno Azevedo que me incentivou a estudar e buscar aprender. Ao Prof<sup>o</sup>. Mestre Kraemer que sempre esteve disponível para tirar dúvidas e nos incentivou a estudar todos os dias. Ao Prof<sup>o</sup>. Mestre Jamerson que sempre nos surpreende com suas histórias e encanta com seu jeito tão simples de ensinar. A Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Denise Lima que, no início do curso, despertou em mim o desejo de leitura, de entender o processo de ensinar e de buscar alternativas para o ensino. A Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. M<sup>a</sup>. Cláudia Pegado que foi um divisor de águas, ensinando a usar metodologias e organizar as ideias para ensinar. Ao Prof<sup>o</sup>. Mestre César Zica que busca sempre o melhor que seus alunos podem oferecer, nos faz pesquisar e nos explica e ensina tão bem como usar um quadro de maneira organizada. Ao Prof<sup>o</sup>. Dr.<sup>o</sup> Rodrigo Dias que foi um incentivador a fazer e usar materiais manipuláveis para ensinar matemática. Ao Prof<sup>o</sup>. Mestre Flávio Nolêto pelas incansáveis horas de estudo, pela alerta de buscar o máximo de conhecimento para ensinar, de que primeiro devemos aprender para depois ensinar. Ao Prof<sup>o</sup>. Mestre José ailton pela disposição em ajudar e sua animação em todas os momentos. Ao Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup> Wallysonn pelo Carisma, paciência e disposição em ajudar.

Um reconhecimento especial à Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mirelle Freitas, minha orientadora, que começou esse processo de pesquisa e orientação há muito tempo. Suas correções, orientações, apoio, incentivo e suas considerações durante o percurso da pesquisa, uma grande incentivadora e uma referência no mundo acadêmico, a qual permitiu e despertou o desejo de fazer diferente, correr atrás dos meus objetivos, de pesquisar, de não me acomodar e buscar sempre fazer o melhor que eu pudesse fazer. Obrigada pelas experiências enriquecedoras, pela amizade e pelo carinho e por ser essa mulher forte que corre atrás, que desperta em nós o melhor, que nos incentiva a estudar, que é um exemplo como professora, orientadora e amiga.

A minhas amigas e amigos cujo incentivo e apoio durante esse percurso foi fundamental, companheiros de estudos com os quais compartilho minhas alegrias, dúvidas e lágrimas. Muito obrigada pelo apoio, pelos laços de amizade que criamos e pelos momentos que tivemos juntos e pelos grandes ensinamentos que me proporcionaram.

A minhas mães e irmãos que me deram lições valiosas durante esses anos, pela preocupação, incentivo, apoio e esforço em apoiar minha educação.

A Ednon Gomes Soares Junior, carinhosamente Ju, meu companheiro incentivador e amigo, às minhas filhas Julia e Sophia, motivo pelo qual voltei a estudar.

A todos os meus familiares obrigada pelo apoio incentivo e compreensão.

Ninguém caminha sem aprender a caminhar,  
sem aprender a fazer o caminho caminhando,  
refazendo e retocando o sonho pelo qual se  
pôs a caminhar.

(PAULO FREIRE, 1997, p. 155).

## RESUMO

**SOARES, Janaina Pereira Alves. Material Manipulável como Ferramenta de Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental.** 2020. 77f. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, *Campus Palmas*, Palmas -TO, 2020.

O objetivo principal desta pesquisa é compreender materiais manipuláveis e as contribuições do seu uso no processo de ensino aprendizagem de matemática no Ensino Fundamental. Discutimos os conceitos e as contribuições desses materiais ao longo da história. Recursos manipuláveis como pedras, ábaco, uso das mãos são usados desde a antiguidade para resolução de situações do dia a dia, o uso desses materiais foi defendido por Pestalozzi no século XIX e começou a ser difundido em 1920 no Brasil. Fizemos uma revisão bibliográfica sobre o ensino e aprendizagem de matemática em consonância com a BNCC, discutindo princípios e práticas, e apresentando as competências e habilidades para a disciplina de Matemática, e os objetos de conhecimento. Apresentamos o uso de diferentes materiais para diversos objetos de conhecimento da matemática. De modo que o ensino aprendizagem de matemática com o uso de materiais manipuláveis forneça experiências e a partir delas os conceitos matemáticos possam eventualmente ser construídos. Observamos que atividades com materiais manipuláveis apresentam resultados positivos na aprendizagem. Entretanto, há que se observar que o planejamento e a reflexão são essenciais para que se possa alcançar esses bons resultados.

**Palavras-chave:** Materiais manipuláveis; Ensino aprendizagem de matemática; Ensino Fundamental.

## ABSTRACT

**SOARES, Janaina Pereira Alves. Manipulable Material as a Tool for Teaching and Learning mathematics in Elementary School.** 2020. 77f. Paper work. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, *Campus* Palmas, Palmas -TO, 2020.

The main aim of this study is to understand manipulable material and their contribution to mathematics teaching and learning process in Elementary School. We discussed concepts and contributions of these material through history. Manipulable resources, like rocks, abacus and ever our own hands have been used since very ancient times to solve everyday problems. The usage of such material was advocated by Pestalozzi in the 19th century and started to spread in 1920 in Brazil. I carried out a biographical research about mathematics teaching related to National Common Frame regulation for Basic Education (BNCC). We reviewed main practices and principles of mathematics teaching and presented competencies and abilities that need to be addressed on this field and its content. We present how to use different materials with a variety of contents. Therefore, mathematics teaching using manipulable materials can bring about experiences that can build mathematics knowledge. We observe that we get good learning levels when using manipulable material. However, planning and consideration are key factors in order to get good learning results using these materials..

**Keywords:** Manipulable material; Mathematics teaching and learning; Elementary school.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1. Jogo mental com palitos.....                                            | 34 |
| Figura 2 - Jogo mental com prendedores e papelão .....                            | 35 |
| Figura 3 - Jogo mental com prendedores e papelão. ....                            | 35 |
| Figura 4 - Multiplicação de 700 por 60 no ábaco.....                              | 36 |
| Figura 5 - Multiplicação de 700 por 2 no ábaco.....                               | 36 |
| Figura 6 - Multiplicação de 60 por 20 no ábaco.....                               | 37 |
| Figura 7 - Multiplicação de 20 por 2 no ábaco.....                                | 37 |
| Figura 8 - Resultado da multiplicação de 720 por 62 no ábaco.....                 | 38 |
| Figura 9 - Multiplicação de 720 por 62 no ábaco horizontal .....                  | 40 |
| Figura 10 - Multiplicação de 720 por 62 no Soroban .....                          | 40 |
| Figura 11 - Multiplicação de 720 por 62 no ábaco vertical.....                    | 41 |
| Figura 12 - Multiplicação grega em registros atuais .....                         | 42 |
| Figura 13 - Multiplicação grega na malha quadriculada .....                       | 43 |
| Figura 14 - Multiplicação grega com a utilização do material dourado .....        | 44 |
| Figura 15 - Multiplicação de 22 por 16 com material dourado .....                 | 44 |
| Figura 16 - Multiplicação na malha quadriculada .....                             | 45 |
| Figura 17 - Cálculo manual usando o método grego.....                             | 45 |
| Figura 18 - Multiplicação e divisão com material dourado.....                     | 46 |
| Figura 19 - Soma de fração com água e copos.....                                  | 48 |
| Figura 20 - Soma de frações com água e copos.....                                 | 48 |
| Figura 21 - Subtração de frações com água e copos .....                           | 48 |
| Figura 22 - Divisão de fração com discos de frações e contadores de macarrão..... | 49 |
| Figura 23 - Soma de frações com discos de frações.....                            | 49 |
| Figura 24 - Unidade de milhar .....                                               | 50 |
| Figura 25 - Representação do número 23.....                                       | 50 |
| Figura 26 - Utilização do material dourado na adição .....                        | 51 |
| Figura 27 - Utilização do material dourado adição com transporte.....             | 52 |
| Figura 28 - Uso do material dourado na subtração .....                            | 53 |
| Figura 29 - Divisão Euclidiana exata e não exata do número 12.....                | 54 |

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 30 - Raiz quadrada com utilização de material dourado.....                           | 54 |
| Figura 31 - Divisão de frações com material dourado .....                                   | 55 |
| Figura 32 - Conjunto de figuras planas e ( polígonos ).....                                 | 56 |
| Figura 33 - Coleção de poliedros e não poliedros .....                                      | 57 |
| Figura 34 - Desenhos que podemos fazer com os polígonos.....                                | 58 |
| Figura 35 - Vistas a partir de desenhos com polígonos em posições<br>diferentes .....       | 58 |
| Figura 36 - Exemplo de questão que podemos usar material manipulável para<br>explicar ..... | 59 |
| Figura 37 - Material utilizado para explicar vistas .....                                   | 60 |
| Figura 38 - Construção de figuras com Origami .....                                         | 60 |
| Figura 39 - Classificador de ângulos .....                                                  | 61 |
| Figura 40 - Identificador de quadrantes .....                                               | 61 |
| Figura 41 Maquetes e jogo de cartas .....                                                   | 62 |
| Figura 42 - Representação da área do triângulo em malha quadriculada e<br>isopor .....      | 62 |
| Figura 43 - Construção de polígonos e não polígonos no geoplano .....                       | 63 |
| Figura 44 - Construção de reta e quadrantes no geoplano .....                               | 63 |
| Figura 45 - Construção de figuras e segmentos de retas no geoplano .....                    | 64 |
| Figura 46 - Construção de poliedros no geoespacial .....                                    | 64 |
| Figura 47 - Simetria no Geoplano.....                                                       | 65 |
| Figura 48 - Visualizando simetrias com espelhos ou vidros transparentes ....                | 65 |
| Figura 49 - Visualizando polígonos através de simetria com espelhos .....                   | 66 |
| Figura 50 - Visualizando polígonos através de simetria com espelhos .....                   | 66 |
| Figura 51 - Gráfico da quantidade de alunos por frutas.....                                 | 67 |
| Figura 52 – Gráfico de barras vertical dos tipos de frutas favoritas.....                   | 68 |
| Figura 53 - Gráfico de Pizza dos tipos de frutas favoritas .....                            | 68 |
| Figura 54 - Resultado do experimento de probabilidade .....                                 | 69 |
| Figura 55 – Construção de Livro história da trigonometria .....                             | 71 |

## LISTA DE QUADROS E TABELAS

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1 - Objetos de Conhecimento das Unidades Temáticas.....  | 21 |
| Tabela 1 - Representação da multiplicação de 7720 por 62.....   | 38 |
| Tabela 2 - Representação da multiplicação de 720 por 62.....    | 39 |
| Tabela 3 – Experimento de probabilidade em 50 lançamentos ..... | 70 |

## SUMÁRIO

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUÇÃO .....                                                     | 14 |
| CAPÍTULO II – REVISÃO DE LITERATURA .....                            | 17 |
| 2.1 Matemática para o ensino fundamental .....                       | 17 |
| 2.2 Materiais manipuláveis e ensino aprendizagem de matemática ..... | 26 |
| 2.2 Procedimentos Metodológicos .....                                | 30 |
| CAPÍTULO III – RESULTADOS E DISCUSSÃO. ....                          | 32 |
| 3.1 Números e álgebra.....                                           | 32 |
| 3.1.1 Material Dourado.....                                          | 49 |
| 3.2 Geometria.....                                                   | 55 |
| 3.3 Probabilidade e Estatística .....                                | 67 |
| 3.4 Experiência de trabalhar com materiais manipuláveis .....        | 71 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS.....                                            | 73 |
| REFERÊNCIAS.....                                                     | 75 |

## INTRODUÇÃO

O desenvolvimento matemático no mundo se deu pela necessidade de contar, medir, aproximar ou resolver problemas. Esse desenvolvimento tomou proporções imensas e, atualmente, a matemática se tornou tecnológica e necessária ao ser humano. No entanto, apesar do seu crescimento em diversas áreas, a sociedade não desenvolveu o pensamento matemático na mesma proporção. Infelizmente, há quem não saiba efetuar operações básicas de soma, subtração, divisão ou multiplicação.

A matemática faz parte da vida das pessoas, está nos celulares, tablets, computadores, na organização do dia a dia - para medir a quantidade de ingredientes para uma receita; saber o horário e a dose exata para tomar determinado medicamento; saber a quantidade de gasolina para colocar no carro; saber a distância de casa à faculdade, ao trabalho ou a outra cidade. Nesse sentido, ela se faz necessária em situações cotidianas e em outras mais específicas.

Os indivíduos se interessam pelo que consideram importante para eles, talvez esteja aí a questão da falta de interesse em tal disciplina, que é encarada por muitos como difícil de ser compreendida. A explicação para tal tema, pode estar no fato do ensino dela ter, ao longo do tempo, se distanciado do cotidiano das pessoas. Muitas vezes, nas aulas de matemática, os alunos perguntam aos seus professores onde será usado e porque estão aprendendo tal conteúdo, que foge um pouco das atividades que frequentemente são desempenhadas no dia a dia. A solução para tal problema passa por diversas situações, como: escolha do livro didático, planejamento de aulas, interesse dos alunos em aprender, recursos didáticos utilizados e disponibilizados para o professor, conteúdo ensinado, idade dos alunos, objetivos, metodologia de ensino, modo de condução das aulas e métodos de avaliação.

O processo de ensino-aprendizagem não se resume apenas a ministrar aulas. Na matemática, é um processo contínuo, que necessita de uma base sólida e

sequência. É imprescindível que, em cada fase desse processo, os objetivos de aprendizagem sejam alcançados. No entanto, no ensino fundamental, médio e superior as lacunas abertas de conteúdos não apresentados/aprendidos e/ou objetivos não completados prejudicam o aprendizado de forma significativa, direcionando a refletir sobre como se aprende.

A matemática é uma linguagem expressa através de símbolos. A dificuldade de compreender esses símbolos, enunciados e operações matemáticas prejudicam o aprendizado. Analisar as dificuldades encontradas por alunos e professores relativos ao processo de ensino-aprendizagem é um desafio, a atuação do professor é relevante para aprendizagem do conhecimento matemático do aluno, para que seja capaz de trabalhar a capacidade de dedução, desenvolva a criatividade na resolução de questões, o raciocínio lógico e a parte cognitiva.

Metodologias de ensino em matemática são meios de compreender conceitos matemáticos de forma construída, tanto pelo professor quanto pelo aluno. A didática da matemática, como uma tendência contemporânea da educação matemática, prioriza a particularidade do conhecimento matemático. A dimensão social da aprendizagem nessa área de conhecimento procura compreender como se aprende matemática na escola. Cada área de conhecimento tem suas particularidades, seus conteúdos específicos e suas dificuldades, o que requer metodologias específicas e níveis de aprendizagem e avaliações diferentes.

Na matemática, a utilização de materiais manipuláveis para o ensino tem sido apontada como uma possibilidade diante da mudança em como as pessoas aprendiam e os recursos que tinham no passado e como elas aprendem e os recursos que possuem atualmente. Nesse sentido, este estudo busca compreender o uso de materiais manipuláveis no processo de ensino aprendizagem de matemática, recursos necessários, planejamento e estratégias a adotar.

Apresentamos um trabalho desenvolvido sob abordagem qualitativa. Quanto à finalidade, a pesquisa é aplicada, pois se volta para solucionar problema concreto e desenvolver conhecimento sobre o assunto. Trata-se de um estudo de caso. Inicialmente, foi feita uma revisão bibliográfica, em que pesquisamos o uso de materiais manipuláveis como ferramenta de ensino e aprendizagem para investigar o

que é, quando surgiu, como pode ser usado e para que, que conteúdos referentes ao ensino fundamental anos finais podem ser trabalhados e como, porque usá-los, quando usá-los.

Partimos da questão do uso de materiais manipuláveis para o ensino de matemática, e buscamos informações sobre como utilizá-los, organizando-as para que depois pudéssemos analisá-las e verificar o resultado na aprendizagem. Para realizar esta pesquisa, desenvolvemos atividades, utilizando material manipulável, com alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no município de Palmas, capital do estado do Tocantins.

O objetivo geral desta pesquisa é analisar as contribuições da utilização de materiais manipuláveis para o ensino e aprendizagem de matemática no 6º Ano do Ensino Fundamental. Como objetivos específicos, temos: apresentar como usar materiais manipuláveis para ensinar matemática, identificar as dificuldades encontradas pelo professor ao utilizar esses materiais e verificar os benefícios de sua utilização para o processo de ensino aprendizagem.

Diante desse cenário, surgem as seguintes questões: Quais materiais manipuláveis podem contribuir para o ensino aprendizagem de matemática? Quais conteúdos podem ser trabalhados com materiais manipuláveis? Com utilizar materiais manipuláveis no ensino de matemática?

Isto posto, passamos à discussão dos princípios teóricos que norteiam este estudo.

## **CAPÍTULO II – REVISÃO DE LITERATURA**

Este capítulo é organizado em duas subseções, a saber: (i) matemática para o ensino fundamental, na qual são apresentadas as competências e habilidades para essa disciplina para os anos finais - foco deste estudo e discute-se sobre os princípios e práticas do processo de ensino-aprendizagem de matemática; e (ii) materiais manipuláveis e ensino aprendizagem de Matemática, cujo foco é situar historicamente a relação dos materiais manipuláveis e da matemática, e como eles podem contribuir no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina do saber.

### **2.1 Matemática para o ensino fundamental**

Os planejamentos de aulas e projetos devem ser feitos de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que regulamenta o currículo a ser adotado por escolas públicas e privadas, definindo quais aprendizagens essenciais devem ser desenvolvidas pelos alunos, contemplando as unidades temáticas da Matemática, que são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística; com possibilidade de inserir temas transversais.

A BNCC é organizada em competências e habilidades, sendo as competências o conjunto de habilidades usados para a resolução de problemas. Assim, competência refere-se à mobilização de conhecimentos, e habilidade ao conjunto de atitudes e valores necessários para resolver questões complexas do cotidiano, do trabalho e/ou do exercício da cidadania (BNCC, 2019).

No documento são apresentadas 10 competências gerais propostas para as três etapas da educação, são elas: (i) valorização e utilização do conhecimento, buscando um aluno capaz de entender, aprender, colaborar e construir uma sociedade justa e inclusiva; (ii) exercitar a curiosidade intelectual de forma científica desenvolvendo a criatividade e a crítica, dando-lhe oportunidade para expor suas ideias, seu pensamento, suas perguntas, fazendo com que ele seja capaz de pesquisar e encontrar novas dúvidas e a partir de seus questionamentos cheguem a soluções de forma criativa; (iii) valorizar manifestações artísticas e culturais; (iv) usar diferentes linguagens (verbal, cultural, visual, sonora e digital); (v) compreender, utilizar e criar tecnologias digitais; (vi) valorizar as diversidades culturais dando ao

aluno a compreensão do seu papel e importância na sociedade, na vida para poder exercer sua cidadania de forma responsável e crítica; (vii) Argumentação dando-lhe a capacidade de defender suas ideias com base em fatos e dados; (viii) autoconhecimento e autocuidado necessários para o cuidado do seu corpo, sua saúde física e emocional reconhecendo sua importância para a sociedade; (ix) empatia e colaboração a importância do trabalho em grupo para o desenvolvimento de discussões, questionamentos, críticas, e a função que cada um tem na sociedade e o que tem e pode contribuir; e (x) responsabilidades pessoal e coletiva.

Ademais, para cada área de conhecimento temos competências e habilidades específicas. Nesse sentido,

[...] cada componente curricular apresenta um conjunto de Habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento - aqui entendidas como conteúdos, conceitos e processos - que por sua vez, são organizados em unidades temáticas. As unidades temáticas definem um arranjo dos objetos de conhecimento ao longo do ensino fundamental adequando às especificidades dos diferentes componentes curriculares (BRASIL, 2019, p. 28-29).

Nas competências e habilidades específicas de Matemática para Ensino Fundamental, apresenta-se o que o aluno deve aprender nessa matéria tão vasta e complexa. Precisamos conhecê-las para que possamos trabalhar o que necessita ser desenvolvido. São oito competências:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto da necessidade e preocupação de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, [...] que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos [...]
2. Desenvolver o raciocínio lógico o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, [...].
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações - problemas em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas [...] expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxograma, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, [...].

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2019, p. 267)

Cabe a nós, professores, buscar formas instigar o desenvolvimento dessas competências e habilidades, pois o aprendizado depende das experiências e interações proporcionadas e vivenciadas, aliada ao interesse e objetivo do aluno em aprender. Assim, colaborando para que o aluno pense, analise, reflita, fale e argumente.

No ensino fundamental anos iniciais e finais há um desafio maior e mais complexo para os estudantes, pois além de retomarem e ressignificarem o que aprenderam no ensino fundamental anos iniciais, devem aprofundar esse conhecimento potencializando sua autonomia. Ademais, os alunos neste nível estão em transição entre a infância e adolescência, fase do desenvolvimento de amadurecimento e descoberta da criança e adolescente.

Segundo consta na BNCC, o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da educação básica, uma vez que:

A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos - contagem, medição de objetos, grandezas - e técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório [...]. Apesar de a Matemática ser uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam em axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel [...] na aprendizagem da Matemática. No ensino fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos - Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade - precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. (BRASIL, 2019, p. 265).

As unidades temáticas no Ensino Fundamental anos finais levam em conta o desenvolvimento, experiências e conhecimentos matemáticos do aluno, o significado que a matemática tem para ele em seu cotidiano, a importância do significado dos símbolos matemáticos e a utilização dessa linguagem simbólica como forma de comunicação.

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometrias dinâmicas, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender a ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2019, p. 298)

Conhecer as Competências específicas e as cinco unidades temáticas, nos permite ter uma visão mais ampla do conhecimento e das habilidades essenciais para cada ano escolar, possibilitando-nos trabalhar de forma planejada, aprofundando os conteúdos de forma crescente, complementando o que eles já aprenderam de forma significativa e lógica.

Os objetos de conhecimento das unidades temáticas para o 6º ano do Ensino Fundamental são respectivamente: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. No quadro 1 (são apresentados os conteúdos mínimos a serem trabalhados nessa série em cada uma dessas unidades temáticas).

Na unidade temática Números estão inclusos: (i) sistema de numeração decimal - características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal; (ii) operações (adição, subtração, divisão, e potenciação) com números naturais, divisão euclidiana; (iii) fluxograma para determinar a paridade de um número, múltiplos e divisores de um número natural, números primos e compostos; (iv) frações - significados (parte / todo quociente), equivalência, comparação, adição, subtração; cálculo da fração de um número natural, adição e subtração de frações; (v) operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais; (vi) aproximação de números para múltiplos de potências de 10; e (vii) cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas sem fazer uso da ‘regra de três’.

Quadro 1 - Objetos de Conhecimento das Unidades Temáticas

| Números                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Álgebra                                                                                                        | Geometria                                                                                                                                                                     | Grandezas e Medidas                                                                                                                                               | Probabilidade e Estatística                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Sistema de numeração decimal;<br/>Operações;<br/>Divisão euclidiana.</p> <p>Fluxograma para determinar a paridade de um número.<br/>Múltiplos e divisores;</p> <p>Números primos e compostos;</p> <p>Frações:<br/>Aproximação de números para múltiplos de potências de 10;</p> <p>Cálculo de porcentagens.</p> | <p>Propriedades da igualdade;</p> <p>Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais.</p> | <p>Plano cartesiano;</p> <p>Prismas e pirâmides;<br/>Polígonos;<br/>construção de Figuras semelhantes:<br/>ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.</p> | <p>Problemas sobre medidas envolvendo grandezas;<br/>Ângulos: noção, usos e medida;<br/>Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.</p> | <p>Cálculo de probabilidade e estatística em um espaço amostral equiprovável;<br/>Cálculo de probabilidade por meio de repetições de experimentos;<br/>Coleta de dados;<br/>Organização e registro;<br/>Construção de diferentes tipos de gráficos para representação e interpretação;<br/>Diferentes tipos de representações;<br/>Gráficos e fluxogramas.</p> |

Fonte: adaptado de Brasil, 2019, p. 300-305.

No que se refere à unidade temática Álgebra, os objetos de conhecimento a serem trabalhados englobam: (i) propriedades da igualdade; (ii) problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais; e (iii) problemas envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Na Geometria são compreendidos: (i) plano cartesiano, associação de vértice de um polígono a pares ordenados; (ii) prismas e pirâmides - planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas); (iii) polígonos - classificação quanto ao número de vértices, às medidas dos lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados; (iv) construção de figuras semelhantes - ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas; e (v) construção de retas paralelas e perpendiculares - fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.

Na unidade temática Grandezas e Medidas, são abordados os objetos de conhecimento: (i) problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume; (ii) ângulos - noção, usos e medida; (iii) plantas baixas e vistas aéreas; e (iv) perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.

Em probabilidade e estatística, abarca-se: (i) cálculo de probabilidade e estatística como razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável; (ii) cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequência de ocorrências e probabilidade frequentista); (iii) leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas; (iv) coleta de dados, organização e registro; (v) construção de diferentes tipos de gráficos para representação e interpretação das informações; (vi) diferentes tipos de representações; e (vii) gráficos e fluxogramas.

As habilidades são gradativas e espera-se que o aluno aprenda na unidade temática Números:

comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais [...]. Reconhecer o sistema de numeração decimal, [...] suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos [...] com ou sem o uso de calculadora. Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo um número natural qualquer é um par). Classificar números naturais em primos e compostos,

estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “ é múltiplo de”, ‘ é divisor de’, ‘é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações. critérios de divisibilidade por 2,3,4,5,6,9,10,100 e 1000. Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplos e de divisor. Compreender comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja número natural, com e sem o uso de calculadora. Resolver e elaborar problemas que envolvam adição e subtração com números racionais positivos na representação fracionária. Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora; fazer estimativas de quantidade e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima. Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três” utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.(BRASIL, 2019, p.301).

Na Álgebra espera-se que o aluno seja capaz de:

Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.(BRASIL, 2019, p.303).

Na Geometria espera-se que o aluno seja capaz de:

Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como localização dos vértices de um polígono; Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial. Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e ângulos. Identificar características de quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para apresentações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (BRASIL, 2019, p.303)

Em grandezas e medidas espera-se que o aluno seja capaz de:

Construir algoritmo para resolver situações passo a passo ( como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.); Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área ( triângulos e retângulos ), capacidade e volume ( sólidos formados por blocos retangulares ), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada a figuras geométricas. Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. Determinar medidas de abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ ou tecnologias digitais. Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas. Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional a medida do lado, o que não ocorre com a área.(BRASIL, 2019, p.303)

Em probabilidade e estatística espera-se que o aluno seja capaz de:

Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional ( forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos ( título, eixos, legendas, fontes e datas ) em diferentes tipos de gráfico. Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentados pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões. Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto; Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados ( por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc. ).(BRASIL, 2019, p.305)

De acordo com Libâneo (2006) a Didática está ligada ao processo de ensino aprendizagem, é um ramo da pedagogia que faz uma integração entre teoria e prática dando suporte ao fazer pedagógico. Esse processo tem uma formação contínua e gradual. Para esse autor (op.cit.)

O processo de ensino é uma atividade conjunta de professores e alunos, organizados sob a direção do professor, com a finalidade de provar as condições meios pelos quais os alunos assimilam ativamente conhecimentos, habilidades, atitudes e convicções. (LIBÂNEO, 2006, p. 29).

O ensino envolve, pois, as fases de planejamento, elaboração, execução e avaliação nas dimensões política, humana e técnica; observando os objetivos da aula, as habilidades que se pretende alcançar dentro das temáticas de ensino para que o estudante obtenha formação global e adquira as competências e habilidades

esperadas. Assim, o processo de ensino aprendizagem, para (LIBÂNEO, 2006, p. 54), compreende “uma sequência de atividades do professor e dos alunos” com vistas à apreensão de conhecimentos e ao “desenvolvimento de habilidades através das quais os alunos aprimoram capacidades cognitivas”.

Dessa forma, possibilitando ao indivíduo viver em sociedade, participar da vida econômica ser crítico e reflexivo, uma vez que, é objetivo da escola formar o aluno integralmente em todos os aspectos da vida. Nessa perspectiva, o professor não pode se limitar ao uso de fórmulas, é necessário compreender o processo de ensino aprendizagem e fazer uso de ferramentas metodológicas e tecnológicas com objetivo de organizar o processo ensino aprendizagem e proporcionar ambiente que instigue o aluno a aprender, crescer evoluir e ser um cidadão crítico.

Para Zabala (1998), a intervenção educativa na aula se articula em torno de alguns processos de ensino aprendizagem, analisados de diferentes pontos de vista: como o aluno aprende e como o professor ou professora ensina. O processo avaliativo ocorre através das dimensões: factual, conceitual, procedimental e atitudinal. Na dimensão factual atua-se no sentido de conhecer um fato; na conceitual deve-se ensinar o conjunto de valores e símbolos, o aluno ou aluna deve compreender os conceitos, estabelecer relações entre esses e conceitos já vistos anteriormente e relacioná-los com outros temas; na procedimental o professor ou professora realiza o processo de ensino, reconhece e cria mecanismos capazes de perceber as necessidades e diversidades dos alunos; e na atitudinal abarca atitudes e normas éticas que permitem que pessoas ou grupos sociais emitam um juízo sobre as condutas em sociedade.

Uma aprendizagem significativa de fatos envolve sempre a associação dos fatos aos conceitos que permitem transformar este conhecimento em instrumento para a concepção e interpretação das situações ou fenômenos que explicam.[...] Os conteúdos conceituais, tanto os fatos como os conceitos, se situam, fundamentalmente, dentro de capacidades cognitivas. Temos que verificar o que os alunos sabem sobre estes conteúdos. Portanto, as atividades para poder conhecer esse saber [...] podem ser de papel e lápis já que [...]conforme a idade é possível expressar por escrito o conhecimento que tem. Os conteúdos procedimentais implicam saber fazer, [...] O que define sua aprendizagem não é o conhecimento que se tem dele, mas o domínio ao transferi-lo para a prática. (Zabala. 1988, p. 202-207).

Para Weisz (2001), o ensino deve dialogar com a aprendizagem. O diálogo entre professor e aluno acontece pela necessidade de se ouvir o aluno, compreendê-lo e discutirmos o sucesso/fracasso escolar. Assim, permitindo

descobrir que conteúdo é fácil ou difícil para o aluno, o que ele compreende ou não compreende, que conhecimentos prévios ele possui que pode auxiliá-lo na sua aprendizagem; dando a ele oportunidade de formular hipóteses a partir do que foi apresentado. Por outro lado, fornecendo ao professor um ponto de partida para trabalhar a partir do que o aluno já sabe, mediando e fazendo uma ligação entre aluno e objeto de estudo, facilitando sua compreensão, estimulando sua curiosidade, criatividade e autonomia, auxiliando-o a desenvolver capacidade de tomar suas próprias decisões.

Para que isso ocorra, é preciso deixar o aluno mostrar o que sabe conhecer o aluno: ações, postura, comportamento, nível de desenvolvimento cognitivo, como ele aprende e pensa. Na busca por avançar no conhecimento deve-se proporcionar aos estudantes formas diferentes de aprender e desafios de aprendizagem. Dessa maneira, ele poderá pensar em situações as quais ainda não pensou. Além disso, atuar com intervenção e avaliação, valorizando o erro, pois ao errar o aluno apresenta a necessidade de aprender, isso aponta um indício sobre a forma de trabalho do(a) professor(a) em sala de aula, a adequação das atividades (ou não) para o grupo e/ou estudante, evidenciando pontos a serem melhorados. Passa também pela necessidade de formação continuada de professores e aponta para reflexão e auto avaliação da nossa prática docente; além de dialogar com a equipe pedagógica, apresentando experiências, possíveis parcerias e trabalho em conjunto com a escola (Ibid.).

A profissão docente é complexa, envolve inúmeras variáveis. Apresentamos nesta subseção os princípios que regem a educação nacional expostos na BNCC, mais especificamente quanto ao ensino da matemática no Ensino Fundamental, e a complexidade da atuação do professor (da sala de aula). Passamos, então, para discussão sobre o ensino aprendizagem de matemática.

## **2.2 Materiais manipuláveis e ensino aprendizagem de matemática**

Recursos manipuláveis para o aprendizado são utilizados desde a antiguidade, tanto por pessoas que precisavam de representações para situações do seu dia a dia, quanto por aquelas que fizeram matemática exaustivamente e criaram métodos, algoritmos e fórmulas que usamos atualmente para representar e calcular

determinados problemas, desenvolveram matemática mental. Esses materiais eram, sempre que possível, utilizados para ensinar, aprender, demonstrar ou representar princípios/situações/teorias matemáticas.

O uso de pedras para representar animais é um material manipulável, uma vez que estamos nos valendo de um objeto para representar uma contagem. O uso das mãos é usar material manipulável, estamos nos valendo de um recurso que podemos manipular para contar. O uso do ábaco para realizar contas é um recurso manipulável usado há muito tempo para resolver problemas matemáticos. Assim, o uso de materiais manipuláveis tem se mostrado um recurso importante para a melhoria do aprendizado de matemática ao longo da história, pois nos auxilia a materializar o conhecimento matemático.

Arquimedes fazia uso de representações para sua matemática. Ele desenvolveu a bomba de parafuso de Arquimedes, usada até hoje, descobriu o princípio de Arquimedes, desenvolveu um jogo curioso chamado Stomachion, um dos quebra cabeças mais antigos que conhecemos, o qual deu origem ao o cálculo combinatório, entre outras contribuições. Trata-se de

um jogo tipo tangram mas com 14 partes que se juntam para formar um quadrado[...] Provavelmente Arquimedes se preocupou em resolver o problema de quantas formas essas 14 partes podem ser juntadas para formar novamente o quadrado[...] Para Netz e Noel este trabalho dá início ao cálculo combinatório[...] De acordo com estimativas modernas existem 17.152 maneiras diferentes de combinar as peças do stomachion formando o quadrado. (ASSIS, 2008, p. 31).

Ademais, segundo Laértios (2008) “Tales mediu a altura das pirâmides pela sombra das mesmas, fazendo a medição na hora em que nossa própria sombra corresponde ao nosso tamanho”. Ele usou os conhecimentos que possuía de semelhança de triângulos e solstício, ficou de pé esperando a hora em que sua sombra tivesse o mesmo comprimento do seu corpo (sua altura) e, assim, conseguiu calcular a altura das pirâmides; ou seja, ele usou o próprio corpo como material manipulável para resolver um problema matemático.

Eratóstenes de Cirene - 200 a.C. - foi o primeiro a realizar o cálculo da medida da circunferência da Terra com erros compreensíveis para sua época, ele

era bibliotecário da biblioteca de Alexandria, em suas leituras em papiros antigos encontrou uma anotação curiosa.

[...] Na biblioteca, Eratóstenes ficou sabendo da existência de um poço com notáveis propriedades, situado perto da cidade de Siene, no sul do Egito, perto da atual Assuã. A cada ano, ao meio dia de 21 de junho, o dia do solstício de verão, o Sol brilhava diretamente dentro de um poço e iluminava-o até fundo [...] Eratóstenes fincou uma vareta verticalmente ao solo de Alexandria e mediu o ângulo entre a vareta e os raios de sol. E o que é crucial para o problema é que este ângulo equivale ao ângulo entre duas linhas radiais traçadas de Alexandria a Siene até o centro da Terra. Ele mediu o ângulo como sendo de  $7,2^\circ$  [...] Mediu a distância entre as duas cidades, que se revelou de 5.000 estádios. Se isso representa  $1/50$  da circunferência da Terra então a circunferência total deve ser de 250.000 estádios. [...] A estimativa da circunferência da Terra ficava em 46.250 quilômetros, que é apenas 15% maior do que o valor verdadeiro de 40.100 quilômetros. [...] Agora Eratóstenes podia deduzir o tamanho da Lua e do Sol e calcular suas distâncias até a Terra. (SINGH, 2006, p. 20 )

[...] O gnomon consistia de uma haste colocada perpendicularmente sobre uma superfície plana. A sua utilização era feita através de uma exposição direta ao sol cuja posição em relação ao horizonte era determinada pela sombra formada pela haste a cada instante, instrumento bastante semelhante aos relógios de sol. (SAMPAIO, 1995, p.74).

Para realizar esse cálculo Eratóstenes utilizou material manipulável, o gnomon (uma estaca), para medir a sua sombra e obter o ângulo. Usou pesquisas anteriores, daí a importância das pesquisas (de fazer anotações e observações), uma anotação que para muitos poderia ser insignificante, para ele possibilitou esse cálculo. Isso foi a chave para a descoberta do cálculo da medida da circunferência da Terra e outros cálculos como a distância da Lua e do Sol.

Segundo Ifrah (1997), ao longo da história as civilizações se valeram de vários objetos para contar, a saber: pedras, homens, ossos, ábaco de pedras, varas com pedras furadas, pérolas, conchas em barbantes de cores diversas, feijões ou grãos de milho em diversas casas munidos de buracos, fichas de osso, marfim ou metal, ábaco móvel de botão ou bola furada (ábaco contador).

A história está repleta de exemplos em que houve necessidade de representações concretas para problemas reais de forma a possibilitar que se chegasse a uma solução. A partir desse contexto, percebemos a importância de materiais manipuláveis para ensino de matemática. Serrazinha (1996) esclarece que o uso de materiais que invoquem a utilização dos diversos sentidos humanos e que fomentem o envolvimento físico dos estudantes (material manipulável) tem sido

defendido por inúmeros pedagogos desde Pestalozzi no século XIX, estando presente em numerosos currículos em diferentes países nos anos 30.

Nacarato (2005) levanta questionamentos acerca de materiais manipuláveis, como: que posição devemos assumir ao utilizar esses materiais, qual a importância da sua utilização em sala de aula, de que tipo e em quais conteúdos, quais são mais comumente utilizados em livros didáticos, e se aparecem em livros didáticos de todas as séries ou somente nas séries iniciais. Destaca ainda, que Pestalozzi, no século XIX, defendeu que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos. Além disso, afirma que o contexto de utilização de materiais manipuláveis no Brasil que ocorreu na década de 1920 e ficou marcado pelo movimento empírico ativista que decorre das ideias escolanovistas, que se contrapõe ao modelo tradicional de ensino. Nessa época, as ideias não surtiram muito efeito no ensino, ou pelo despreparo dos professores ou pelo fato de não ter muita inovação em livros didáticos.

Educadores como Dienes e Bruner, que se apoiaram nas ideias de Piaget, deram contribuições próprias para o ensino de matemática, apontando uma tendência construtivista forte no ensino de matemática nas décadas de 1970 e 1980, influenciadas pelas contribuições desses autores e de outros estudos vindos da psicologia Cognitiva. Deve-se destacar a importância do aluno: manusear objetos citando (material dourado e geoplano, por exemplo), interagir com esses materiais (conhecê-los de forma física e não via desenhos planos), conhecer as potencialidades de cada material e explorar esses recursos. Isso se dá porque o uso inadequado, ou com pouca exploração, em nada contribui para o ensino aprendizagem matemática (Ibid.).

[...] O professor em sua prática de sala de aula, na maioria das vezes, contando apenas com o livro didático como suporte para o seu trabalho depara, cada vez mais, com livros repletos de materiais manipuláveis - a maioria deles não disponíveis nas escolas ou quando existentes, não são utilizados ou por falta de condições de trabalho (classes superlotadas, principalmente). Os sentimentos de impotência e os conflitos vividos pelos professores, preocupados que estão com a aprendizagem de seus alunos, acabam se explicitando nos cursos de formação que frequentam. Muitas vezes incorporam um discurso a favor do 'concreto', sem uma reflexão do que seria concreto em matemática. [...] No caso do livro didático [...] principalmente os das séries iniciais - vem incentivando o uso de materiais manipuláveis, muito embora, na maioria das vezes, as orientações encontram-se no Manual do Professor e o livro se restringe a apresentar desenhos de tais materiais. Compete assim, ao professor, incrementar ou não suas aulas com a utilização desses materiais. No entanto [...] poucos sabem fazer uso desses materiais estruturados e até mesmo nunca tiveram

oportunidade de manipulá-los. limitam-se, muitas vezes, aos desenhos apresentados nos livros. (NACARATO, 2005, p. 2-5).

Dessa forma, a questão não está na utilização desses materiais e sim na maneira como são utilizados, os significados que podem ser construídos a partir de sua utilização, uma vez que o uso desses materiais (ou qualquer outro) não garantem, por si só, a melhoria do ensino. A eficácia de qualquer recurso pedagógico está condicionada ao modo que é usado; às representações, ações e reflexões do aluno (propiciadas pela forma de trabalhar com o material). Isso é que tem relevância na construção do conhecimento matemático. Assim, a complexidade da sala de aula aliada a impossibilidade de usarmos uma única metodologia para ensinar matemática, nos força a usar uma diversidade de materiais e transitar entre eles (ibid.).

Nessa perspectiva, a formação e atuação docente são nucleares no processo de ensino aprendizagem, uma vez que é a forma de lidar com o material a questão central nesse processo.

## **2.2 Procedimentos Metodológicos**

Neste capítulo é apresentada a metodologia adotada para esta pesquisa. Trata-se de estudo sob o paradigma qualitativo, mais precisamente um estudo de caso. Moura Filho (2005) afirma que o estudo de caso existe desde a década de 40 e tem sido usado em várias áreas do conhecimento. Esse método de pesquisa busca aprofundar as informações coletadas para serem estudadas de forma detalhada.

O estudo de caso abrange, pois, detalhes sobre o objeto pesquisado possibilitando análise cuidadosa de dados de um participante ou de vários (Ibid). Assim, consideramos que, para esta pesquisa, o estudo de caso é o método que permitirá compreender o objeto pesquisado e alcançar os objetivos desta pesquisa.

Antes de ir a campo, foi feita revisão bibliográfica sobre: ensino aprendizagem de matemática, em consonância com a BNCC; e materiais manipuláveis - histórico e desdobramentos pedagógico para área de matemática. Além de levantamento e explicitação de conteúdos matemáticos e materiais manipuláveis potenciais para auxiliar no processo de ensino aprendizagem de tais questões.

O estudo de campo foi planejado, elaborado e aplicado por esta pesquisadora, no período de 28 de Março a 29 de Agosto de 2018. O projeto aconteceu em três etapas: observação, planejamento das atividades e aplicação, e elaboração do projeto interventor. Adotamos uma metodologia na qual os alunos pudessem experimentar o que eles estavam estudando com utilização de materiais manipuláveis e disponibilizando tempo para que eles pudessem refletir/pensar ou visualizar a solução manipulando-os.

As atividades foram desenvolvidas numa escola pública de tempo integral no município de Palmas, capital do estado do Tocantins, situada em região periférica. Com relação à organização escolar, essa instituição atende alunos do pré escolar 2 ao 9º ano da Educação Básica (Ensino Fundamental); possui 32 salas disponíveis para ensino, 01 biblioteca, dependências administrativas, refeitório coberto, quadra poliesportiva coberta, sala de dança/teatro e laboratório de informática.

A proposta de estudar matemática com materiais manipuláveis foi implementada em turmas de sexto ano do Ensino Fundamental, durante o período de aulas regulares. No total, 169 estudantes com idade entre 11 a 14 anos participaram.

Foram realizados doze regências (horas/aula) em três turmas diferentes da mesma série entre os dias 21 de Maio a 15 de Julho de 2018. O projeto interventor foi realizado em 18 horas em sala de aula com utilização de materiais manipuláveis relacionados ao conteúdo estudado em sala de aula (sistema de numeração decimal, multiplicação, ângulos, polígonos, área e perímetro, frações e gráficos).

A opção por trabalhar com materiais manipuláveis com estas turmas e conteúdos específicos deve-se ao fato de que, durante o período de observação e colaboração no Ensino Fundamental, percebemos que os alunos se sentiam desmotivados para aprender Matemática. O objetivo da intervenção na escola foi oportunizar aos estudantes o desenvolvimento da capacidade de relacionar o conhecimento teórico e prático de matemática por meio da observação e manipulação de materiais manipuláveis.

Compreendidos os preceitos metodológicos, no próximo capítulo apresentamos os resultados.

## **CAPÍTULO III – RESULTADOS E DISCUSSÃO.**

Neste capítulo são apresentadas as atividades desenvolvidas na escola, utilizando material manipulável e sua relação com os objetos de conhecimento matemáticos. Para tanto, este capítulo se organiza nas seguintes subseções de acordo com os objetos de conhecimento mencionados no quadro 1: (i) números e álgebra; (ii) geometria; e (iii) probabilidade e estatística e (iv) experiência de trabalhar com materiais manipuláveis.

### **3.1 Números e álgebra**

A história da matemática está repleta de exemplos sobre o desenvolvimento dessa área de conhecimento, vejamos o princípio de base decimal. Segundo Ifrah (1997 [1947], p. 48-49)

[...] Em certas regiões da África ocidental, os pastores tinham um costume bem prático para enumerar um rebanho. Faziam desfilar os animais, uns dos outros. Na passagem do primeiro, enfiava-se uma concha numa correia branca, outra concha na do segundo e assim por diante. Na passagem do décimo animal, desfazia-se o colar e enfiava-se uma concha numa correia azul, associada às dezenas, depois, recomeçava-se a enfiar as conchas na correia até a passagem do vigésimo animal, ocasião em que se enfiava uma segunda concha na correia branca. Quando esta continha, por sua vez, dez conchas, cem animais tendo então sido contados, desfazia-se o colar das dezenas e enfiava-se uma concha numa correia vermelha, reservada desta vez às centenas. E assim procedia-se sucessivamente, até o fim da contagem dos animais. Com a enumeração de duzentos e cinquenta e oito animais, por exemplo, oito conchas encontram-se enfiadas na correia branca, cinco na azul e duas na vermelha.[...]. Nessa técnica concreta, cada concha da correia branca conta como uma unidade simples, cada concha da correia azul conta por dez, enquanto que uma concha da correia vermelha marca um agrupamento de cem unidades. É o que se chama de o princípio da base dez. Temos aí um exemplo da enumeração concreta decimal.

Na organização para enumerar um rebanho de bisões, um clã utiliza-se de seu próprio corpo, suas mãos, para contar. O homem, ao usar representações concretas para retratar objetos, utiliza os dedos das mãos para fazer a contagem, como temos dez dedos nas mãos e nos pés, eles passaram a fazer agrupamentos de dez em dez para facilitar a contagem. Dessa forma, a preferência por agrupar em dezenas está relacionada a anatomia das mãos, ao uso dos dedos para demonstrar quantidade (IFRAH, 1997 [1947]).

Nesse sistema de contagem, compreender o valor posicional e o significado de um número é um conceito matemático muito importante para os alunos dominarem, eles precisam compreender. Em matemática temos apenas dez dígitos, ou algarismos, os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. A partir da combinação deles obtemos os demais números. Segundo Domingues (2003, p. 36-36), “posicional significa, entre outras coisas, que os números são escritos na forma de sequências finitas dos dez algarismos [...] e que o valor de um algarismo na sequência depende de sua posição”.

Assimilado isso, outros conceitos matemáticos como, por exemplo, as operações, podem ser apreendidos. Nesse sentido, ensinar usando objetos e imagens para representar fisicamente os conceitos matemáticos ao lado de números e símbolos (peças de lego, material dourado, contadores de palito, por exemplo) para somar, subtrair números, ajuda a visualizar ideias abstratas. Os estudantes, a medida que vão se aperfeiçoando gradualmente, param de depender de acessórios físicos.

Geralmente, aprendemos mais rapidamente quando podemos usar agrupamentos práticos para nos apoiar no processo de ensino aprendizagem. Assim, encorajar os alunos a usarem grupos de objetos e tirar certo número de objetos desse grupo, oferece base sólida para o conceito de subtração, por exemplo. Depois dessa etapa vem o trabalho voltado para realização de cálculos mentais.

É importante entender como os números podem ser manipulados, partindo do concreto (materiais manipuláveis) para entender as operações e, portanto, desenvolver habilidades mentais para realizar cálculos posteriormente. Fazer isso mentalmente, sem contadores, sem calculadora, depois de terem tomado consciência (aprender e compreender) a lógica e etapas das operações matemáticas. Pode parecer, equivocadamente, um processo longo e mais difícil para os alunos, se comparado à maneira tradicional (memorização).

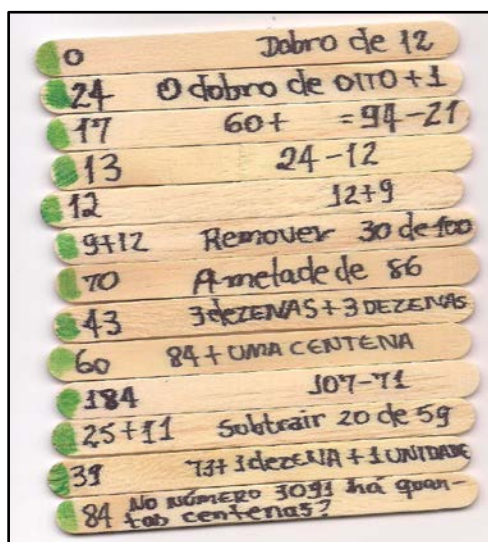
Ressaltamos que a memorização pura não permite ao estudante ter alternativas para solucionar operações “esquecidas”. Compreender conceitos e propriedades matemáticas, por outro lado, propicia trilhar novos caminhos para resolvê-las. Em equações que envolvem adição multiplicação e divisão, por exemplo, podem existir lacunas em ambos os lados da igualdade. Nesse caso, é possível haver mais de uma resposta e várias maneiras de resolver; ocasião

apropriada para incentivar os estudantes a explorar potenciais valores que satisfaçam a igualdade, o que ajuda a desenvolver habilidades investigativas em matemática.

As equações vão ficando cada vez mais difíceis, e a base das operações do sistema decimal proporciona aos alunos ter segurança nos cálculos. A matemática mental é um dos pilares a serem desenvolvidos e consolidados ao longo do Ensino fundamental e Médio. A prática da aritmética mental oportuniza o desenvolvimento de habilidades investigativas, confiança, flexibilidade, conhecimento dos números e das propriedades de cada operação; um jogo em que usamos as propriedades das operações pode ser usado para treinar essas habilidades.

Vejamos o jogo mental sobre fatos das operações de adição e subtração e sistema de numeração decimal apresentado na figura 1. Desenvolvido com materiais manipuláveis, nesse jogo os alunos têm que formar uma sequência, que se inicia com o valor zero, e ir resolvendo as operações até chegar a zero novamente.

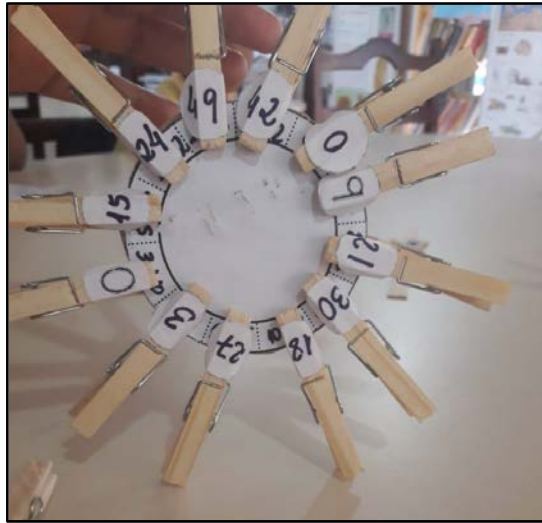
Figura 1. Jogo mental com palitos



Fonte: Acervo próprio.

Usando prendedores de roupa e papelão temos jogo mental sobre as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Nesse jogo, a resposta dos problemas está no prendedor, é necessário que os estudantes peguem e coloquem o prendedor onde está a operação que tem como resultado o prendedor que eles estão de posse, como mostra figura 2.

Figura 2 - Jogo mental com prendedores e papelão



Fonte: Acervo próprio.

Outra opção para trabalhar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, apresentado na figura 3, é utilizar copos descartáveis. A resposta dos problemas está nos copos. Os estudantes devem pegar uma quantidade de 4 copos, por exemplo, e em um tempo de 1 minuto colocar o copo onde está a operação que tem como resultado o copo que eles pegaram.

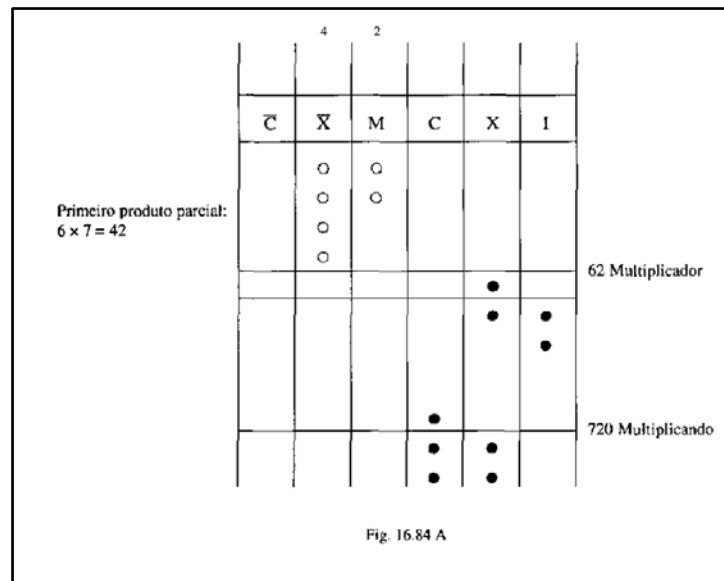
Figura 3 - Jogo mental com prendedores e papelão.



Fonte: Acervo próprio.

Para Caraça (1951), a multiplicação é definida como uma soma de parcelas iguais. Observemos representações da utilização do ábaco em multiplicações de algarismos Gregos e Romanos, representadas nas figuras 4, 5, 6, 7 e 8.

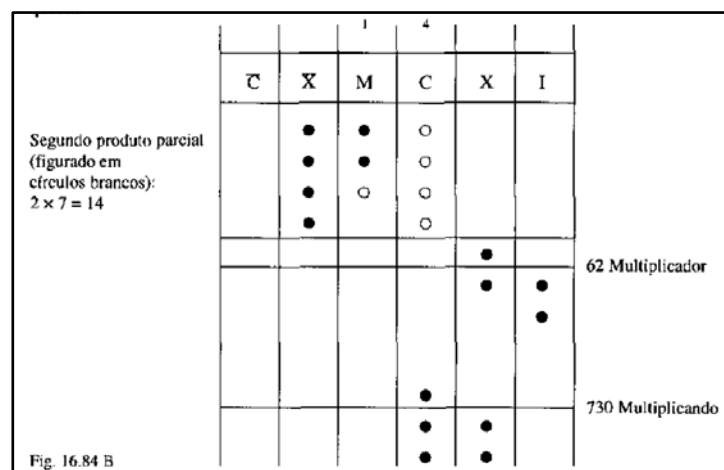
Figura 4 - Multiplicação de 700 por 60 no ábaco



Fonte: Ifrah, 1997, p. 431.

“Após, pelo 7 do multiplicando (que vale 700), multiplica-se o 2 do multiplicador e coloca-se o resultado (ou seja, 1400) no ábaco (colocando 4 fichas na terceira coluna e 1 outra na quarta)”. ( IFRAH, 1997, p 431 ).

Figura 5 - Multiplicação de 700 por 2 no ábaco.



Fonte: Ifrah, 1997, p. 432.

“[...] Suprime-se agora o 7 do multiplicando, e multiplica-se o 6 do multiplicador (que vale 60) pelo 2 do multiplicando (que tem valor 20), coloca-se o resultado (ou seja, 1200), posicionando-se 2 fichas na terceira coluna e 1 ficha na quarta.” ( IFRAH, 1997, p 432 ).

Figura 6 - Multiplicação de 60 por 20 no ábaco.

|                                                                                                                              |                |                |     |     |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|-----|-----|---|---|
| <p>Terceiro produto parcial<br/>(figurado em<br/>círculos brancos):<br/><math>6 \times 2 = 12</math></p> <p>Fig. 16.84 C</p> |                |                | 1   | 2   |   |   |
|                                                                                                                              | $\overline{C}$ | $\overline{X}$ | M   | C   | X | I |
|                                                                                                                              |                | ●              | ● ○ | ● ○ |   |   |
|                                                                                                                              |                | ●              | ●   | ● ○ |   |   |
|                                                                                                                              |                | ●              |     | ●   |   |   |
|                                                                                                                              |                | ●              | ●   | ●   |   |   |
|                                                                                                                              |                |                |     |     | ● |   |
|                                                                                                                              |                |                |     |     | ● | ● |
|                                                                                                                              |                |                |     |     |   | ● |
|                                                                                                                              |                |                |     |     | ● |   |
|                                                                                                                              |                |                |     |     | ● |   |

Fonte: Ifrah, 1997, p. 432.

“Enfim, pelo 2 do multiplicando (que vale 20) multiplica-se o 2 do multiplicador e coloca-se 4 fichas na segunda coluna.” (IFRAH, 1997, p.433 ).

Figura 7 - Multiplicação de 20 por 2 no ábaco.

|                                                                                                                           |                |                |     |     |   |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|-----|-----|---|---|
| <p>Quarto produto parcial<br/>(figurado em<br/>círculos brancos):<br/><math>2 \times 2 = 4</math></p> <p>Fig. 16.84 D</p> |                |                |     | 4   |   |   |
|                                                                                                                           | $\overline{C}$ | $\overline{X}$ | M   | C   | X | I |
|                                                                                                                           |                | ●              | ● ● | ● ● | ○ |   |
|                                                                                                                           |                | ●              | ●   | ● ● | ○ |   |
|                                                                                                                           |                | ●              |     | ●   | ○ |   |
|                                                                                                                           |                | ●              | ●   | ●   | ○ |   |
|                                                                                                                           |                |                |     |     | ● |   |
|                                                                                                                           |                |                |     |     | ● | ● |
|                                                                                                                           |                |                |     |     |   | ● |
|                                                                                                                           |                |                |     |     | ● |   |
|                                                                                                                           |                |                |     |     | ● |   |

Fonte: Ifrah, 1997, p. 433.

Segundo IFRAH (1997, p. 433), “reduzindo agora as diversas fichas dispostas assim na mesa, obtém-se, então, facilmente o resultado que se procura:  $720 \times 46 = 44640$  .”

Figura 8 - Resultado da multiplicação de 720 por 62 no ábaco

|   |   |   |   |   |   |           |
|---|---|---|---|---|---|-----------|
|   | 4 | 4 | 6 | 4 | 0 |           |
| ┌ | X | M | C | X | I |           |
|   | ○ | ○ | ○ | ○ |   | Resultado |
|   | ○ | ○ |   | ○ |   |           |
|   | ○ | ○ |   | ○ |   |           |
|   | ○ | ○ |   | ○ |   |           |
|   |   |   |   |   |   |           |
|   |   |   |   |   |   |           |
|   |   |   |   |   |   |           |

Fig. 16.84 E

Fonte: Ifrah, 1997, p. 433.

A representação atual disso é apresentada nas tabelas 1 e 2 a seguir.

Tabela 1 - Representação da multiplicação de 720 por 62

|                 |                         |                       |
|-----------------|-------------------------|-----------------------|
| $720 \times 62$ | 700                     | 20                    |
| 60              | <b>60 x 700 = 42000</b> | <b>60 x 20 = 1200</b> |
| 2               | <b>2 x 700 = 1400</b>   | <b>2 x 20 = 40</b>    |

Fonte: Elaboração própria.

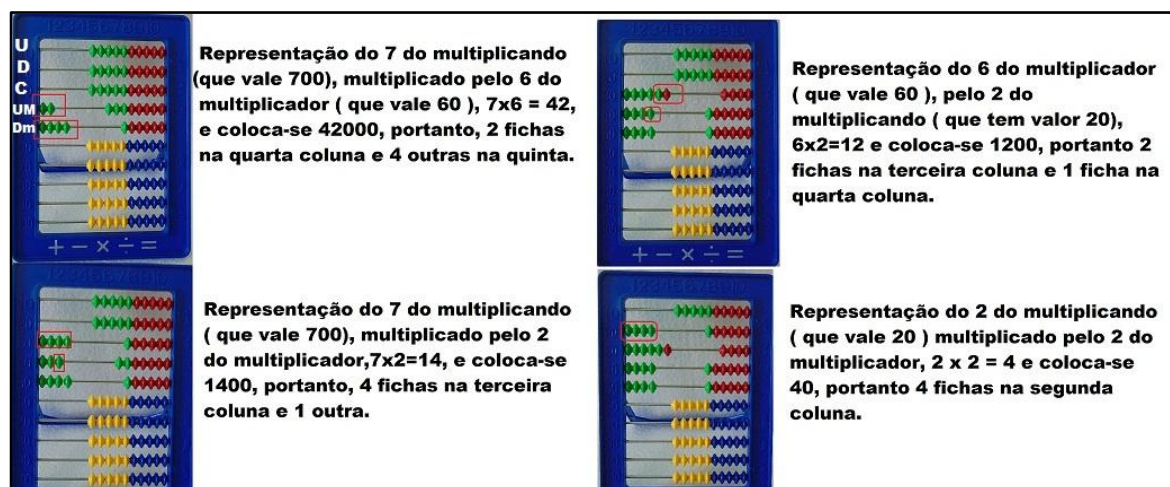
Tabela 2 - Representação da multiplicação de 720 por 62

| 5ª coluna<br>dezena<br>de milhar | 4ª coluna<br>unidade<br>de milhar | 3ª coluna<br>centena | 2ª coluna<br>dezena | 1ª coluna<br>unidade |                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4                                | 2                                 |                      |                     |                      | Representação do 7 do multiplicando (que vale 700), multiplicado pelo 6 do multiplicador (que vale 60), $7 \times 6 = 42$ , e coloca-se 42000, portanto, 2 fichas na quarta coluna e 4 outras na quinta. |
|                                  | 1                                 | 4                    |                     |                      | Representação do 7 do multiplicando (que vale 700), multiplicado pelo 2 do multiplicador, $7 \times 2 = 14$ , e coloca-se 1400, portanto, 4 fichas na terceira coluna e 1 na quarta.                     |
|                                  | 1                                 | 2                    |                     |                      | Representação do 6 do multiplicador (que vale 60), pelo 2 do multiplicando (que tem valor 20), $6 \times 2 = 12$ e coloca-se 1200, portanto 2 fichas na terceira coluna e 1 na quarta coluna.            |
|                                  |                                   |                      | 4                   |                      | Representação do 2 do multiplicando (que vale 20) multiplicado pelo 2 do multiplicador, $2 \times 2 = 4$ e coloca-se 40, portanto 4 fichas na segunda coluna.                                            |
| 4                                | 4                                 | 6                    | 4                   | 0                    | Resultado (soma dos produtos parciais).                                                                                                                                                                  |

Fonte: Elaboração própria.

Essa mesma operação de multiplicação, representada em três ábacos: (i) ábaco horizontal (figura 9); (ii) ábaco Soroban (figura 10); e (iii) ábaco vertical (figura 11). O ábaco horizontal é bastante utilizado no contexto educacional nacional, observemos, na figura 9, o comportamento da multiplicação de 720 por 62 nesse material.

Figura 9 - Multiplicação de 720 por 62 no ábaco horizontal



Fonte: Elaboração própria.

Figura 10 - Multiplicação de 720 por 62 no Soroban



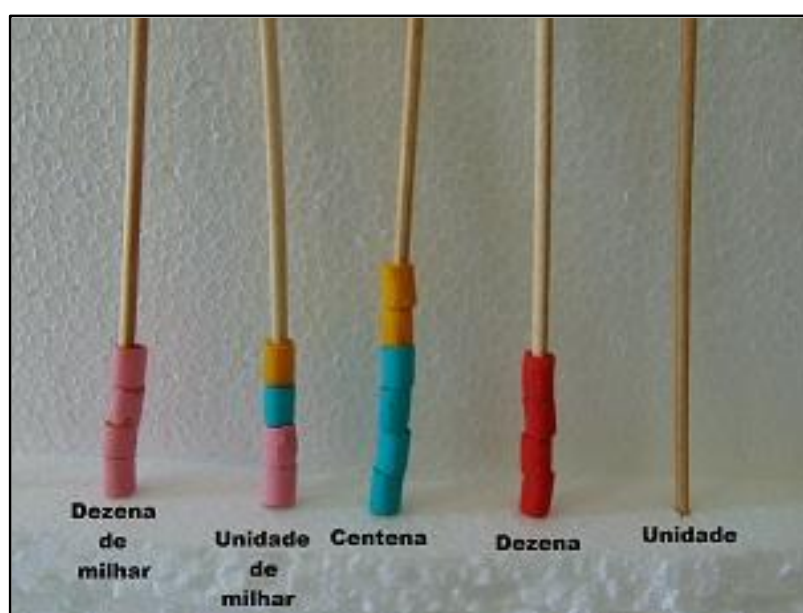
Fonte: Elaboração própria.

Na multiplicação realizada no Soroban (ábaco oriental), cada coluna ou haste possui duas partes, na parte de cima cada conta vale 5 unidades, dependendo da sua ordem (se estiver na coluna de unidades vale cinco unidades, se estiver na coluna de dezena vale cinquenta, na de centena vale 500 e assim por diante). Na parte de baixo temos quatro contas que representam uma unidade (uma unidade, uma dezena, uma centena e assim por diante). Esse Soroban, figura 10, foi

desenvolvido pela autora e possui 13 hastes, feito com estojo escolar, contas de miçangas, linha de crochê e linha de tecido). Ele permite representar unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar e as operações de uma forma acessível, e fácil de fazer. No Soroban o número de hastes é maior, o que possibilita operações com números maiores.

O ábaco é um material que propicia inclusão, pois oportuniza a pessoas com baixa visão ou cegas a representação do número e das operações por meio do toque. Na sequência, temos o terceiro tipo de ábaco, o vertical, representando a mesma multiplicação, na figura 11.

Figura 11 - Multiplicação de 720 por 62 no ábaco vertical



Fonte: Elaboração própria.

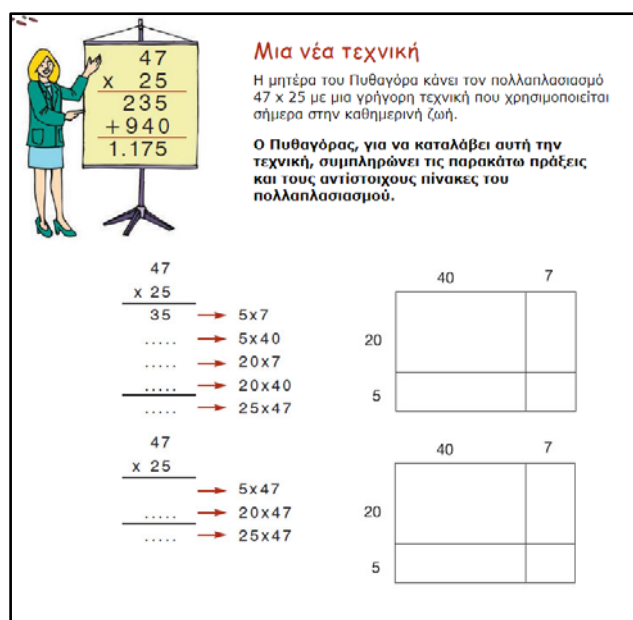
Esse ábaco vertical é feito de isopor, palitos de churrasco e contadores de macarrão coloridos de diferentes cores, com ele podemos representar as unidades dezenas centenas, unidades de milhar e assim por diante. É, também um material de baixo custo.

A utilização do ábaco no processo de ensino aprendizagem de matemática um recurso que promove o desenvolvimento de atenção, concentração, raciocínio lógico e agilidade mental. Trata-se de uma das calculadoras mais antigas que temos registros e facilita a compreensão dos números e operações.

Descrições desse método são encontradas nos livros de Ifrah *história universal dos algarismos a história dos homens contada pelos números e pelo cálculo* de 1997; *uma breve história da matemática grega* de James Gow de 1884; e *uma história da matemática grega* de Thomas L. Heath publicado em 1921.

Na figura 12, temos um recorte de um livro grego: *A Matemática da Escola Primária - A Matemática da Escola e da Vida*<sup>1</sup>, correspondente ao 3<sup>a</sup> ano do Ensino Fundamental, em que é utilizado esse método. Nele pede-se para calcular usando o método completando a tabela correspondente, também pode ser usando o software Geogebra<sup>2</sup>.

Figura 12 - Multiplicação grega em registros atuais



Fonte: Lemonidis. 2007-2013, p. 30

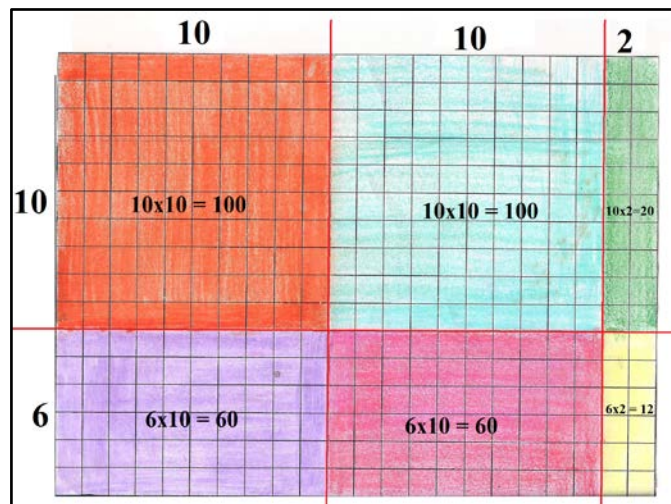
Lemonidis (2011, p. 542), observa semelhança entre a multiplicação grega e o “algoritmo moderno clássico [...]”. Este algoritmo é mais analítico em parte porque dá todas as somas parciais [...]. A multiplicação grega é simples e pode ser usada antes do algoritmo moderno para inserir e explorar suas propriedades.” Atualmente, é possível mostrar com utilização de malha quadriculada ou material dourado todos os

<sup>1</sup>Disponível em: <[http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2170/Mathimatika\\_G-Dimotikou\\_html-empl/index5\\_30.html](http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2170/Mathimatika_G-Dimotikou_html-empl/index5_30.html)>

<sup>2</sup> Software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino. Disponível em: <<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/4319>>.

produtos parciais de números com o auxílio de uma folha quadriculada ou placas de centenas. Por exemplo, se queremos encontrar o produto  $16 \times 22$ , na figura 13 temos um papel retangular com 16 linhas e 22 colunas.

Figura 13 - Multiplicação grega na malha quadriculada



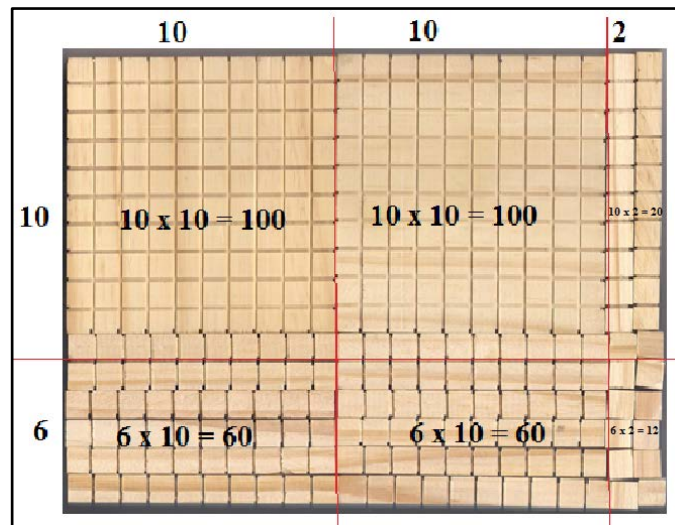
Fonte: Elaboração própria.

Separamos em “caixas” as dezenas e as unidades, o número 16 em duas parcelas 10+6 e o número 22 em três parcelas 10+10+2. E calculando os produtos parciais. Ao somar todos os produtos parciais que foram encontrados, na decomposição dos fatores usamos a propriedade distributiva em relação à adição. A soma desses valores é o produto da multiplicação de  $16 \times 22$ .

- $16 \times 22 =$
- $(10 + 6) \times (10 + 10 + 2) =$
- $100 + 100 + 20 + 60 + 60 + 12 = 352$

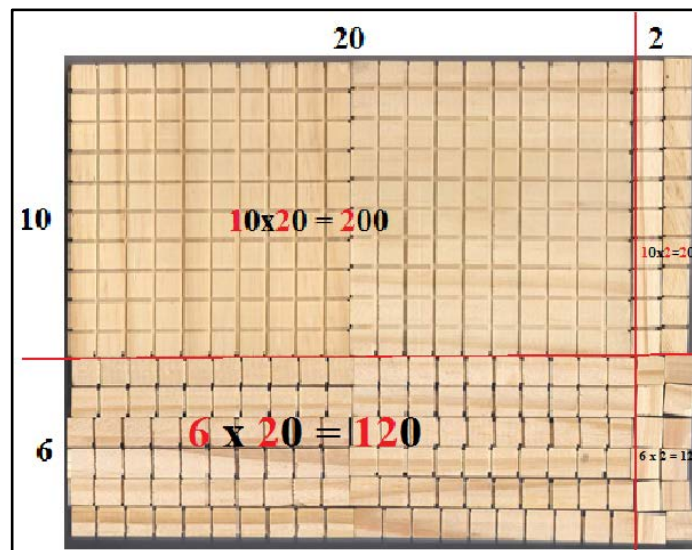
Outra opção, ainda, para realizar essa mesma operação de multiplicação é utilizar material dourado, como apresentamos nas figuras 14 e 15.

Figura 14 - Multiplicação grega com a utilização do material dourado



Fonte: Elaboração própria.

Figura 15 - Multiplicação de 22 por 16 com material dourado



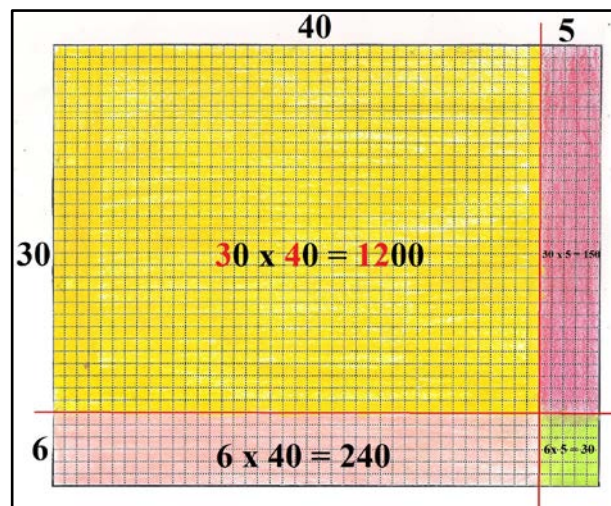
Fonte: Elaboração própria.

Na decomposição dos fatores usamos a propriedade distributiva em relação à adição, e a soma desses valores é o produto da multiplicação de  $16 \times 22$ .

$$\begin{aligned}
 16 \times 22 &= \\
 (10 + 6) \times (20 + 2) &= \\
 200 + 20 + 120 + 12 &= 352
 \end{aligned}$$

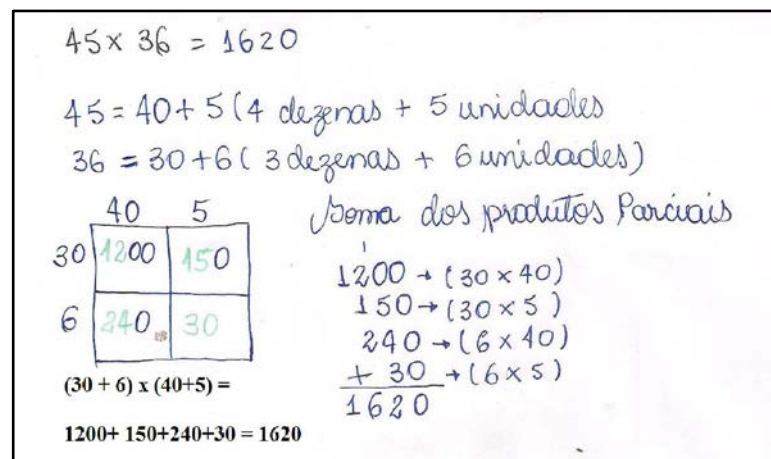
Nas figuras 16 e 17 é ilustrado um comparativo do produto de  $45 \times 36 = 1620$ , utilizando malha quadriculada e cálculo atual - manual utilizando método grego, respectivamente.

Figura 16 - Multiplicação na malha quadriculada



Fonte: Elaboração própria.

Figura 17 - Cálculo manual usando o método grego



Fonte: Elaboração própria.

Ressaltamos que tudo em Matemática é um bloco de construção para o próximo nível. Assim, entender a adição é condição para aprender a multiplicação, que é necessária para compreensão da divisão, por exemplo. Se os alunos não entendem o que estão fazendo, é complicado aplicar seu conhecimento matemático a configurações do dia a dia. Além disso, se os alunos têm um senso numérico

sólido, podem facilmente adquirir novas habilidades matemáticas, porque não estão se atrapalhando tentando descobrir cálculos básicos e perdendo o controle do novo desafio ou tarefa. Por isso, é relevante incentivá-los a mostrar seu conhecimento em todo o seu trabalho, em problemas simples, porque eles precisam ser capazes de compreender e articular todas as etapas, pois os problemas ficarão mais complexos e os alunos precisarão ter as ferramentas para resolvê-los.

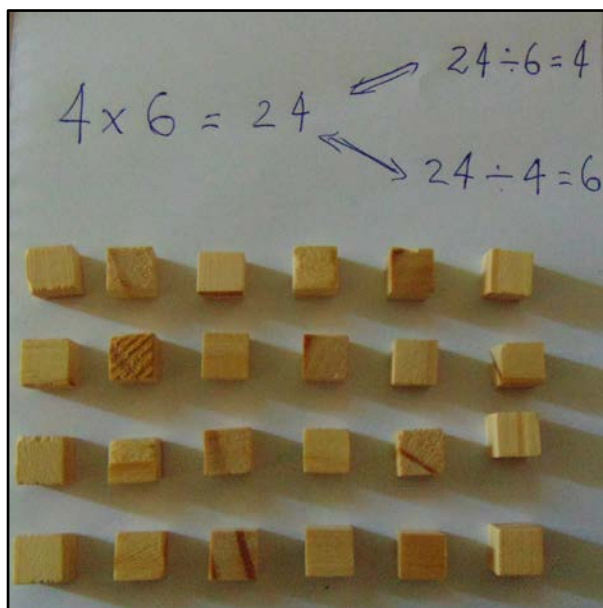
Apresentar cenários do cotidiano ajuda a entender que o conceito das operações é útil. Na divisão, por exemplo, podemos propor dividir doces entre os colegas. Da mesma forma, compreender as operações inversas ajuda na matemática mental, aprender os conceitos por trás de cada operação é importante. Caraça (1951, p. 20) afirma que “[...] em relação a cada uma das operações [...], pode pôr-se o seguinte problema: - dado o resultado da operação e um dos dados, determinar o outro dado. Chama-se operações inversas das primeiras. [...]”.

As operações inversas são operações opostas, falamos sobre o inverso para explicar como a adição e a subtração estão ligadas e como a multiplicação está ligada a divisão, a subtração é o inverso da adição e divisão é o inverso da multiplicação, à medida que vão dominando cada tabuada, é importante que o aluno perceba que essas sentenças estão relacionadas e compreenda essas relações, isso pode ser demonstrado com o auxílio de uma matriz e utilização do material dourado, figura 18, por exemplo no cálculo do produto de 4 por 6:

$$\begin{aligned} 4 \times 6 &= 24 \\ 6 \times 4 &= 24 \\ 24 \div 6 &= 4 \\ 24 \div 4 &= 6 \end{aligned}$$

Quanto mais o aluno conhece os conceitos de divisão mais fácil será o conhecimento subsequente em multiplicação e divisão. É imperativo que os alunos compreendam que dobrar é o inverso de reduzir pela metade, e começar a usar esse fato para verificar seus resultados. Isso dá ao aluno a noção do que é uma equação, que nada mais é do que uma sentença numérica em que um lado da igualdade é igual ao outro.

Figura 18 - Multiplicação e divisão com material dourado



Fonte: Elaboração própria.

A contagem com resto pode dar significado também a esse conceito abstrato, podemos pensar em problemas de história com divisão em que haverá objetos que sobraram após o cálculo (o resto) ou outros que representem divisão por 10, 100 e 100 sem o uso da calculadora. Os estudantes precisam compreender os critérios de divisibilidade, saber esses critérios de divisibilidade, como: (i) um número é divisível por 2 se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8; (ii) um número é divisível por 4 se os dois últimos algarismos forem divisíveis por 4; (iii) um número é divisível por 5 se terminar em zero ou 5, entre outros.

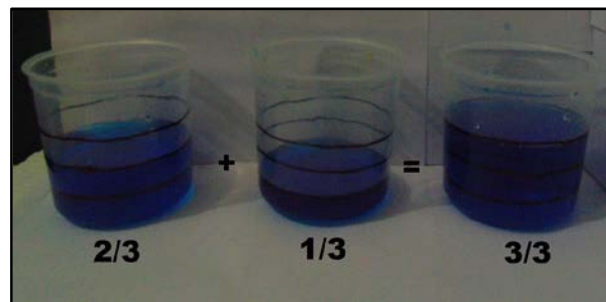
Conhecer essas regras aumenta a compreensão de todo o Sistema de Numeração Decimal, dá segurança para o aluno ao realizar as operações. Na divisão, por exemplo, podemos usar contadores para demonstrar o que o conceito de dividir 24 por 3 significa, podemos pegar os 24 objetos ou contadores e fazer agrupamentos de 3 em 3 para tornar a divisão mais clara. Esses agrupamentos, operações matemáticas, podem ser feitos com a utilização do material dourado, o que torna visível a operação. Tema que trataremos na sequência.

Temos também a fração, um número usado para representar parcelas de um valor inteiro. O conteúdo de frações permite uma vasta oportunidade de trabalhar com materiais manipuláveis, podemos utilizá-los para auxiliar na representação

gráfica de uma fração, podemos comparar frações, somar frações, subtrair frações e ainda fazer frações equivalentes.

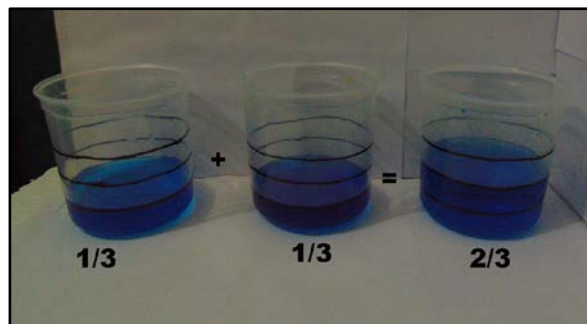
Nas figuras 19, 20 e 21 é ilustrada uma proposta de material manipulável para o estudo de frações. Nessa atividade, o aluno visualiza a fração ao adicionar ou retirar a água dos recipientes que está dividida em três partes iguais.

Figura 19 - Soma de fração com água e copos



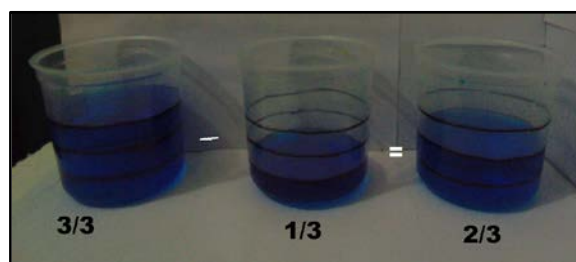
Fonte: Elaboração própria.

Figura 20 - Soma de frações com água e copos



Fonte: Elaboração própria.

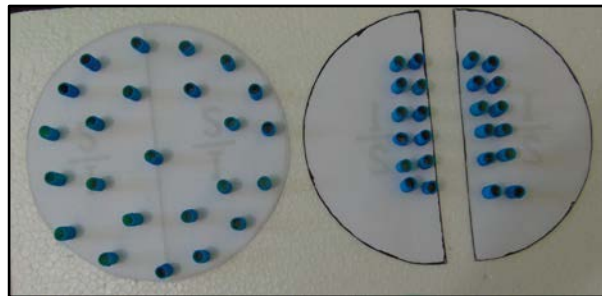
Figura 21 - Subtração de frações com água e copos



Fonte: Elaboração própria.

O número 24, na figura 22, foi dividido em duas partes iguais, temos  $24/2$ , utilizando contadores de macarrão.

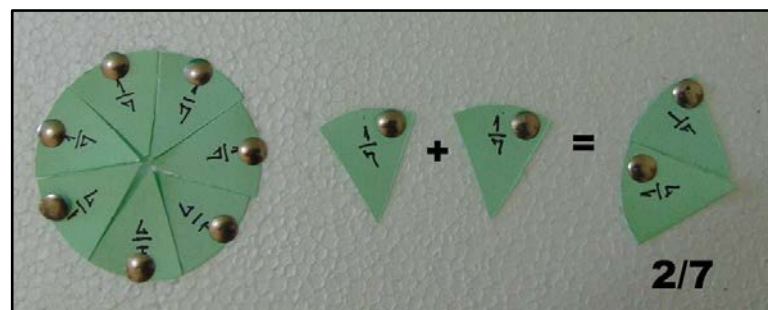
Figura 22 - Divisão de fração com discos de frações e contadores de macarrão



Fonte: Elaboração própria.

Ademais, podemos realizar operações de soma e subtração de frações com com discos de frações, como apresentado na figura 23.

Figura 23 - Soma de frações com discos de frações



Fonte: Elaboração própria.

### 3.1.1 Material Dourado

O material dourado foi desenvolvido pela médica italiana criadora do Método Montessori de Ensino Dra. Maria Montessori. Trata-se de material manipulável idealizado para trabalhar com matemática. Esse material nos auxilia na construção do valor do número, por ser possível fazer uma representação, através dele, do valor de cada algarismo, é um material que incentiva a memorização, mas do ponto de vista de experiências pessoais de manipulação.

O material dourado é um material de base 10, é composto por diferentes figuras geométricas, representado na figura 24.

Figura 24 - Unidade de milhar

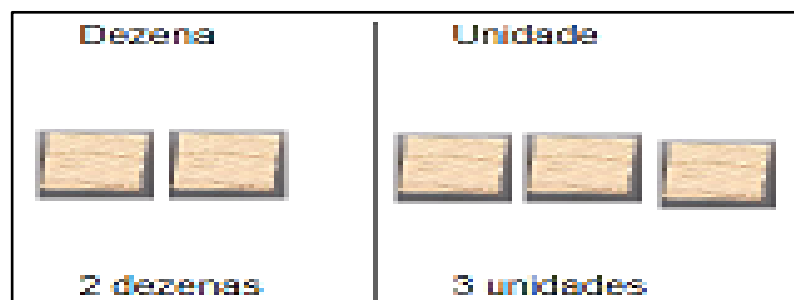


Fonte: Acervo próprio.

Na unidade de milhar o cubo é preenchido, uma forma de representar isso é construir o cubo utilizando dez placas de centenas ou 100 placas de dezenas. Esse recurso prático, capaz de representar a construção do número, nos auxilia nas operações matemáticas, raciocínio lógico. Ele possui uma divisão organizada, é usado inicialmente para trabalhar o sistema de numeração decimal em suas quantidades (unidades, dezenas, centenas, milhar).

Uma vez que conhecemos como cada peça é chamada começamos a introduzir a construção de números maiores, com ênfase no valor posicional. Na figura 25 temos a representação do número 23 (2 dezenas e 3 unidades).

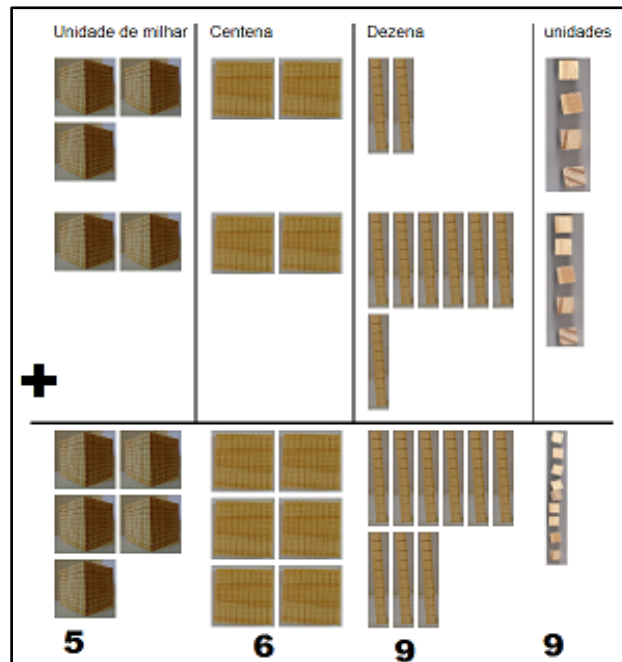
Figura 25 - Representação do número 23



Fonte: Elaboração própria.

Abaixo, na figura 26, temos a adição de  $3224 + 2475$ , na primeira e segunda linhas respectivamente. Para obter o resultado, neste caso, basta somar as peças da primeira e segunda coluna começando pelas unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar  $3224 + 2475 = 5699$  e o resultado está na terceira linha

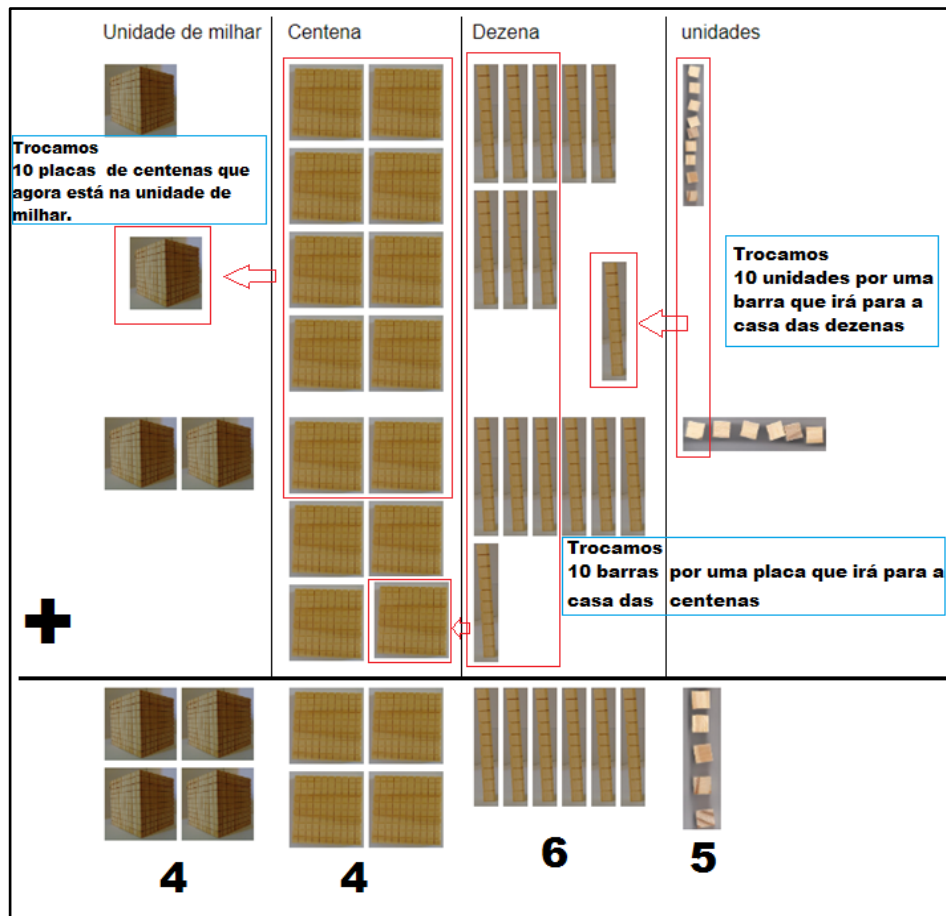
Figura 26 - Utilização do material dourado na adição



Fonte: Elaboração própria.

Na adição dos números  $1889 + 2576$ , figura 27 temos uma adição com transporte, em que começamos pelas unidades e devemos substituir a cada dez unidades de unidades, dezenas, centenas, unidade de milhar por uma unidade a esquerda, ou seja, a cada 10 unidades trocamos por uma barra (dezena), 10 barras trocamos por uma placa (centena) e 10 placas trocamos por um cubo (milhar).

Figura 27 - Utilização do material dourado adição com transporte



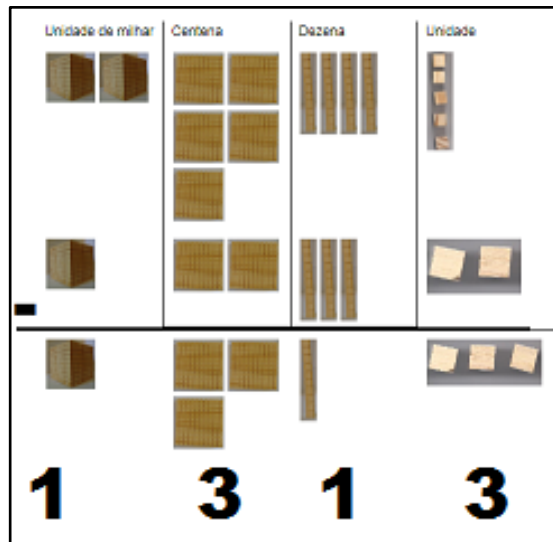
Fonte: A autora (2020).

E como resultado temos  $1889 + 2576 = 4465$ : 10 unidades foram trocadas por uma barra que foi para a coluna das dezenas, 10 barras foram trocadas por uma placa que foi para a coluna das centenas e 10 placas foram trocadas por um cubo que foi para unidade de milhar. O mesmo “procedimento usado em nosso sistema de numeração para efetuar adições e subtrações”, calculamos “em coluna as unidades, depois as centenas acrescidas de algum eventual transporte da coluna anterior e assim por diante” (DOMINGUES, 2017, p. 56).

Na subtração de  $2545 - 1232$ , figura 28, devemos subtrair unidades, dezenas, centenas e milhares que estão no minuendo, pelas quantidades que estão no subtraendo e, quando necessário, transportar. Inicialmente, não trabalhamos esses conceitos deixamos o aluno explorar e descobrir através da manipulação. Depois disso, passamos a ensinar os conceitos das operações. Nesse caso, o aluno seria incentivado a retirar 1232 usando as figuras correspondentes e obteria o

resultado que  $2545 - 1232 = 1313$ . Ele pode, ainda usando material dourado, fazer a operação inversa para testar seu resultado, somando  $1313 + 1232 = 2545$ .

Figura 28 - Uso do material dourado na subtração

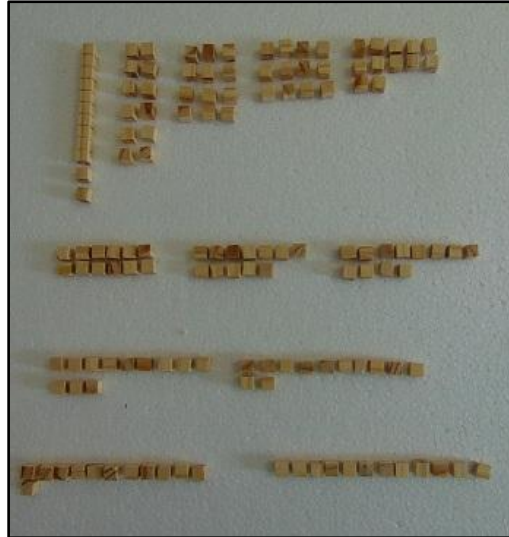


Fonte: Elaboração própria.

O material dourado na visualização da divisão, algoritmo euclidiano (divisão exata e não exata) e multiplicação do número 12 na base 10, com utilização do material dourado, através de agrupamentos o que facilita e dá importância ao processo de agrupamentos,

E assim obtemos os divisores de 12, representado na figura 29, que são (1, 2, 3, 4, 6, 12). Essa construção permite ao estudante visualizar a divisão e a multiplicação. Quando o aluno domina o valor posicional, poderá operar com os números.

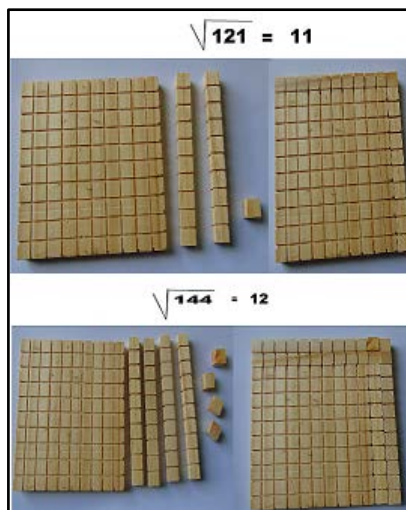
Figura 29 - Divisão Euclidiana exata e não exata do número 12



Fonte: Elaboração própria.

Começamos com operações simples de adição e subtração (de maneira física, transportando os cubos barras ou placas), multiplicação por um ou mais algarismos, divisão, cálculo de raízes quadradas (vide figura 30), áreas e perímetros.

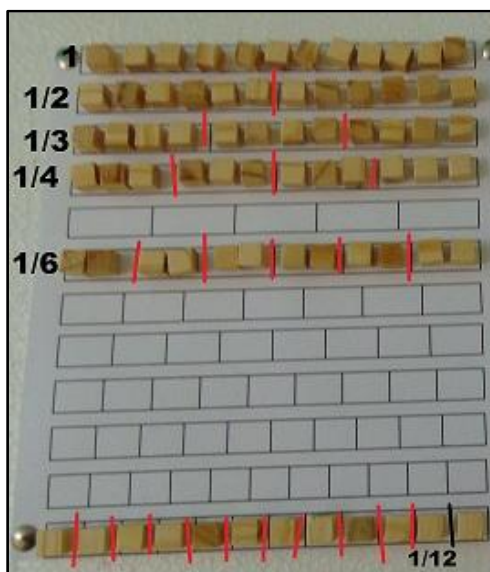
Figura 30 - Raiz quadrada com utilização de material dourado



Fonte: Elaboração própria.

Esse material também, pode ser utilizado no processo de ensino aprendizagem de fração. Na proposta apresentada na figura 31 trabalhamos o conceito de que toda fração é uma divisão, pois o inteiro 12 é dividido em partes iguais, divisão euclidiana e fatoração.

Figura 31 - Divisão de frações com material dourado



Fonte: Elaboração própria.

Dessa forma, observamos que podemos, com material dourado, trabalhar desde conceitos mais simples aos mais complexos. Além disso, entender operação/conceito significa por meio da manipulação é ideal tanto para o ensino como para reforçar conceitos e facilitar estratégias mentais. Uma característica dos materiais Montessori é que se baseiam sequencialmente na aprendizagem anterior, introduzem uma aprendizagem concreta antes da abstrata. Assim, a compreensão do número se desenvolve a partir das experiências cotidianas e da manipulação de objetos reais, até se tornarem ideias abstratas.

### 3.2 Geometria

O uso de material manipulável para o ensino de geometria, seja para reconhecer polígonos, classificar ângulos, diferenciar de figuras planas e tridimensionais, propõe aprendizado por meio da construção, visualização e manipulação, visando que o aprendizado ocorra de maneira significativa. Podemos

trabalhar a construção cubos de papel, utilizar figuras planas para construção de polígonos e mostrar que essas figuras estão contidas nos poliedros.

No caso dos polígonos, há possibilidade de identificarem o número de lados, nomes e ângulos; para poliedros oportuniza-se a identificação de faces, vértices e arestas. Podemos, ainda, utilizar: (i) figuras e poliedros para identificar o que é vista frontal, superior, inferior e lateral; (ii) coleção de polígonos para que visualizar que de acordo com o número de lados ou ângulos o polígono recebe um nome específico, e outros.. Essas estratégias relacionam o conhecimento teórico e prático através da construção, manipulação e visualização das figuras planas e objetos tridimensionais, tornando o processo de ensino e aprendizagem significativo e interessante.

Com o objetivo de identificar as formas da natureza e as formas criadas pelo ser humano, formas planas (polígonos) e formas não planas (poliedros), e objetos tridimensionais, podemos utilizar objetos como tigela, árvore, construções humanas (prédio da escola, por exemplo), frutas, flores, mostrar fotos de construções antigas, entre outros.

Para explicar formas planas e classificar os polígonos, mostrar o número de lados ou ângulos, sua identificação (de acordo com o número de lados), a classificação dos triângulos, quadriláteros e paralelogramos podemos utilizar uma coleção de figuras, desenhá-los na malha quadriculada ou com o auxílio de um conjunto de figuras planas e (polígonos), conforme apresentado na figura 32.

Figura 32 - Conjunto de figuras planas e ( polígonos )



Fonte: Elaboração própria.

Para explicar que as formas não planas são classificadas em poliedros e não poliedros, podemos usar uma coleção de sólidos geométricos (tetraedro, cubo, pirâmide de base quadrada, prismas de base pentagonal, octaedro, icosaedro, paralelepípedo, entre outros) e não poliedros (cilindro, cone, esfera e outros), como ilustra a figura 33.

Figura 33 - Coleção de poliedros e não poliedros

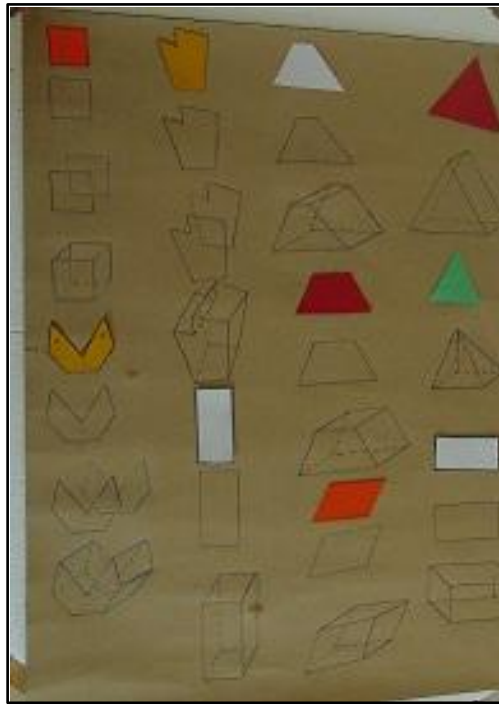


Fonte: Elaboração própria.

Esses poliedros podem ser desenhados na malha quadriculada ou com o auxílio de figuras (polígonos). Geralmente, os alunos têm muita dificuldade em desenhar, muitas vezes não compreendem os conceitos justamente porque as representações que fazem dos polígonos ou poliedros e de figuras no geral são representações equivocadas (um quadrado é desenhado como retângulo, por exemplo). A maneira de desenhar os poliedros usando as figuras está apresentada na figura 34. Primeiro desenhamos o polígono, depois marcamos um ponto ou no centro (quadrado, retângulo) ou outro ponto em que podemos depois marcar as linhas tracejadas (que dão dimensão), desenhamos um outro polígono sobreposto ao primeiro e traçamos as linhas (perpendicular e paralela) ao ponto marcado no

primeiro polígono, posteriormente ligamos todos os vértices. Desenhar usando as figuras torna possível a percepção de que os polígonos estão de fato contidos nos poliedros.

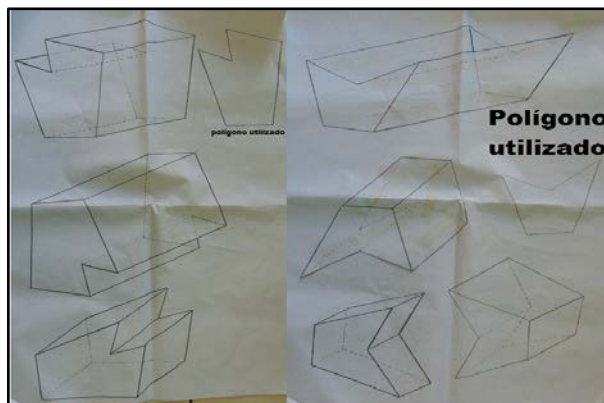
Figura 34 - Desenhos que podemos fazer com os polígonos



Fonte: Elaboração própria.

Podemos perceber as vistas dependendo de como usamos o polígono para a construção do poliedro, como é possível observar na figura 35.

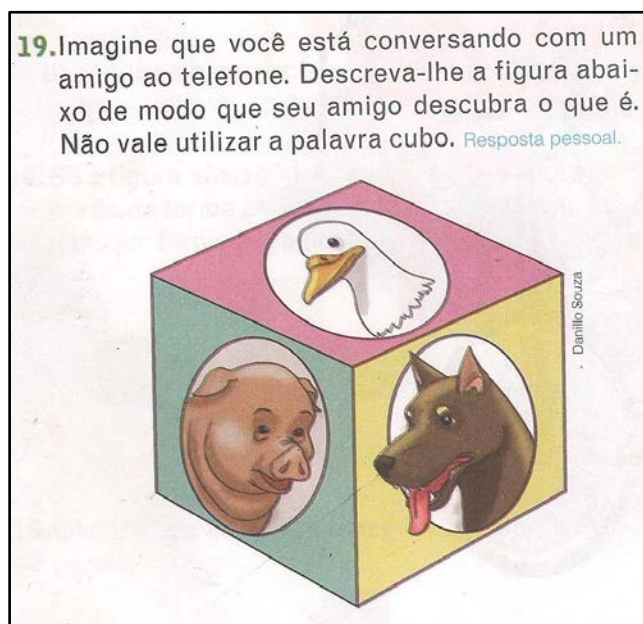
Figura 35 - Vistas a partir de desenhos com polígonos em posições diferentes



Fonte: Elaboração própria.

E também auxiliar os estudantes na compreensão e interpretação de problemas como este da questão 19 do livro do 6º ano da coleção *Praticando Matemática* de Álvaro Andrini, apresentado na figura 36.

Figura 36 - Exemplo de questão que podemos usar material manipulável para explicar



Fonte: Andrini (2015, p. 138).

Eles podem pensar nas características que podem descrever para que o amigo descubra que objeto eles estão descrevendo, entre as respostas pode surgir: que suas faces são formadas por um polígono, que tem seus lados e ângulos iguais, e outras. Essas relações são construídas através da manipulação.

Outra possibilidade para o processo de ensino aprendizagem de matemática com materiais manipuláveis é utilizar cubos de papel (Origami), ou algum outro material, para compreender o que é vista de cima, de lado e de frente e pedir que eles desenhem essas vistas, assim eles poderão identificá-las com maior facilidade, como ilustra a figura 37.

Figura 37 - Material utilizado para explicar vistas



Fonte: Elaboração própria.

O origami é um excelente recurso para trabalharmos conceitos de medidas como metade, frações, construção de figuras. Semelhança e vistas de poliedros e figuras são mais uma forma de utilização de origami, conforme figura 38.

Figura 38 - Construção de figuras com Origami



Fonte: Elaboração própria).

Para classificar ângulos podemos utilizar um classificador de ângulos (figura 39), desenvolvido por Daniela Mendes e disponível pelo laboratório sustentável de matemática, com ele visualizarmos se o ângulo é agudo, reto, obtuso e raso.

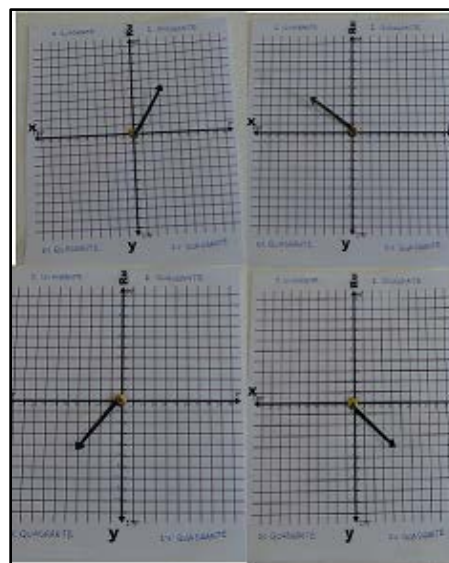
Figura 39 - Classificador de ângulos



Fonte: Elaboração própria.

Movimentando a paleta que fica em 0, podemos ver os quadrantes e pares ordenados no plano  $x, y$ , bem como para identificar pontos no plano de coordenadas cartesianas, como apresentado na figura 40.

Figura 40 - Identificador de quadrantes



Fonte: Elaboração própria.

Maquetes podem ser usadas para ensinar sobre os conceitos de área e perímetro, volume de sólidos, plano cartesiano e distâncias. Combinadas com cartas de atividades, possibilita que os estudantes usem esses conceitos para resolver problemas como, por exemplo, calcular área e perímetro de figuras.

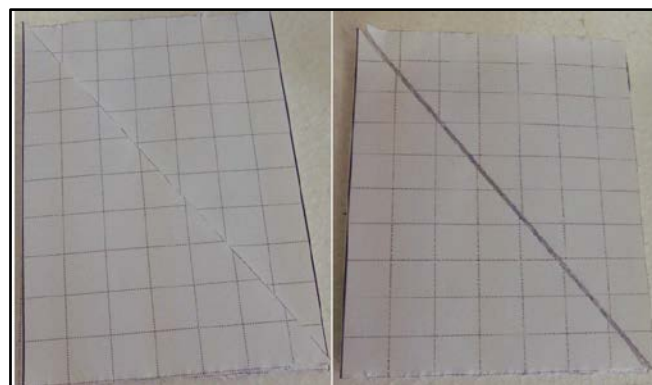
Figura 41 Maquetes e jogo de cartas



Fonte: Elaboração própria.

Área de triângulos pode ser estudada usando geoplano, malha quadriculada e outros diversos recursos. A malha quadriculada de isopor, figura 42, possibilita visualizar porque a fórmula da área do triângulo é  $A = \frac{b \times h}{2}$  (base vezes altura dividido por dois).

Figura 42 - Representação da área do triângulo em malha quadriculada e isopor

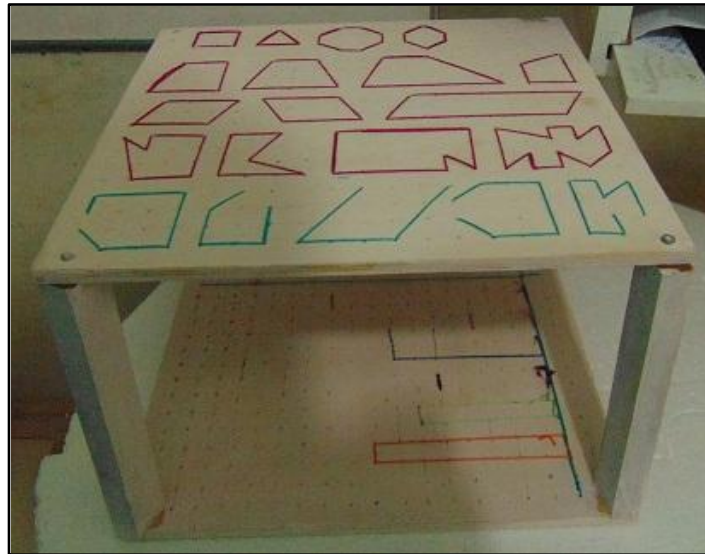


Fonte: Elaboração própria.

O geoplano, foi desenvolvido por Caleb Gattegno em 1961, é um recurso didático manipulável, que auxilia na compreensão de conceitos matemáticos principalmente da geometria, existem vários tipos, esse da figura 43 foi adaptado

pela autora (feito com placas e madeira). Podemos utilizá-lo para visualizar tanto a parte plana como a tridimensional.

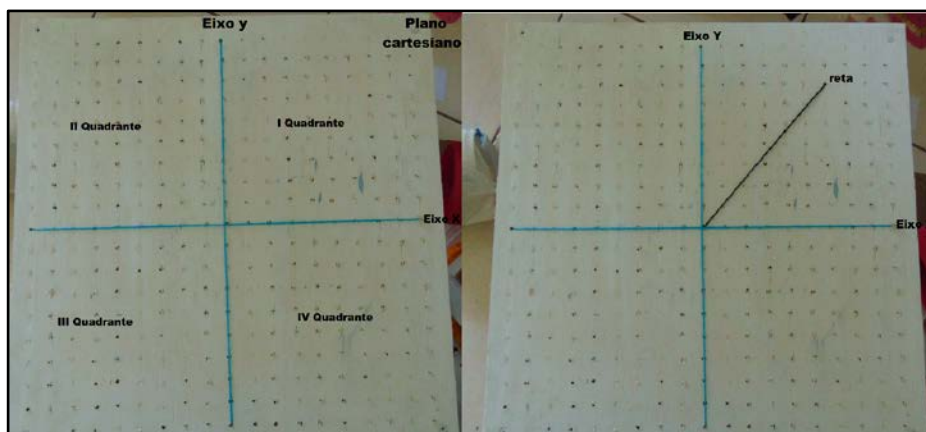
Figura 43 - Construção de polígonos e não polígonos no geoplano



Fonte: Elaboração própria.

O geoplano permite identificar o plano cartesiano, retas, pontos quadrantes. conforme pode ser observado na figura 44.

Figura 44 - Construção de reta e quadrantes no geoplano

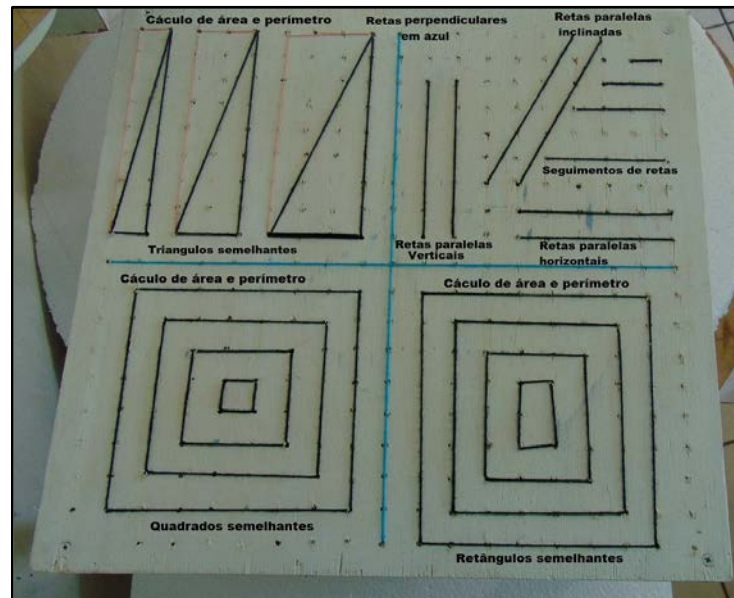


Fonte: Elaboração própria.

Além disso, na figura 45, apresentamos exemplos de construção de segmentos de retas, ponto, retas paralelas, perpendiculares, inclinadas, cálculo de

área e perímetro de figuras como triângulo, quadrado, retângulo e outros, e semelhança de figuras no geoplano.

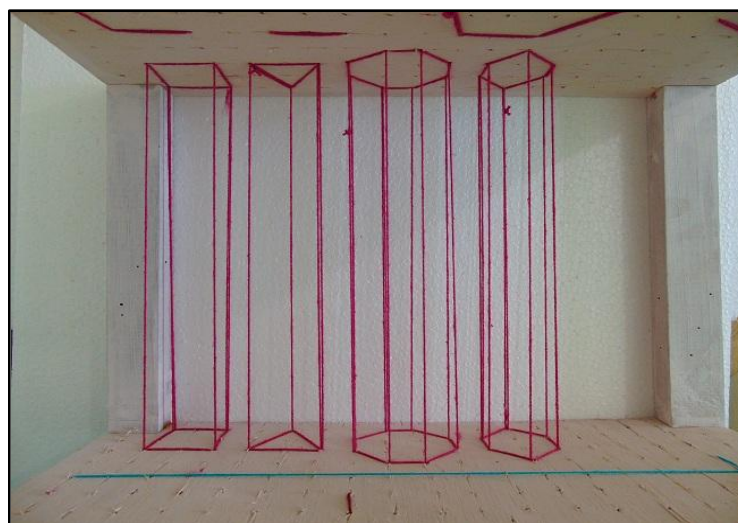
Figura 45 - Construção de figuras e segmentos de retas no geoplano



Fonte: Elaboração própria.

Na figura 46, temos a construção de poliedros e podemos identificar arestas, faces, vértices, polígonos formadores dos poliedros podemos visualizar diagonais e cálculo do volume no geoespacial.

Figura 46 - Construção de poliedros no geoespacial



Fonte: Elaboração própria.

A simetria também pode ser trabalhada usando recursos visuais que permitem uma percepção de como essas transformações ocorrem, como geoplano, espelhos e outros. A figura 47, na sequência, ilustra a simetria no geoplano.

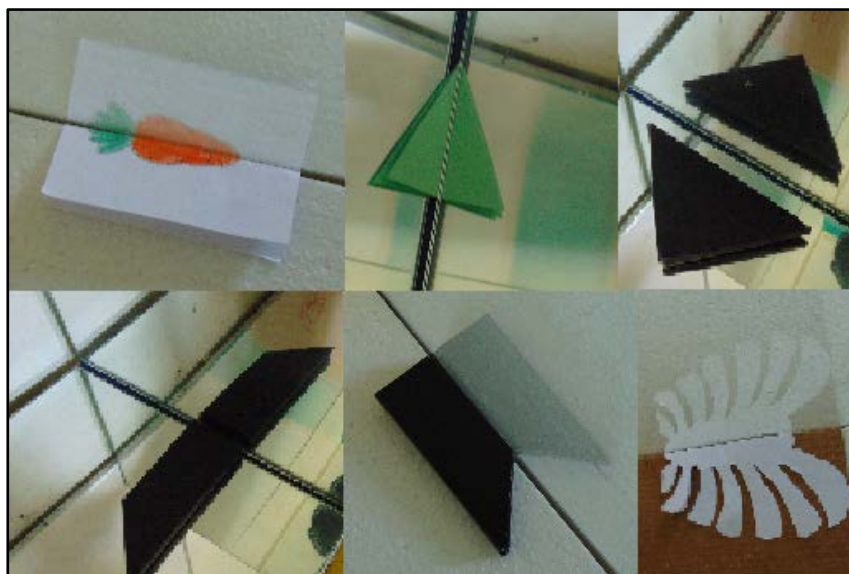
Figura 47 - Simetria no Geoplano



Fonte: Elaboração própria.

Outra forma é utilizar espelhos ou vidros transparentes para explicar sobre simetria, ilustrado na figura 48.

Figura 48 - Visualizando simetrias com espelhos ou vidros transparentes



Fonte: Elaboração própria.

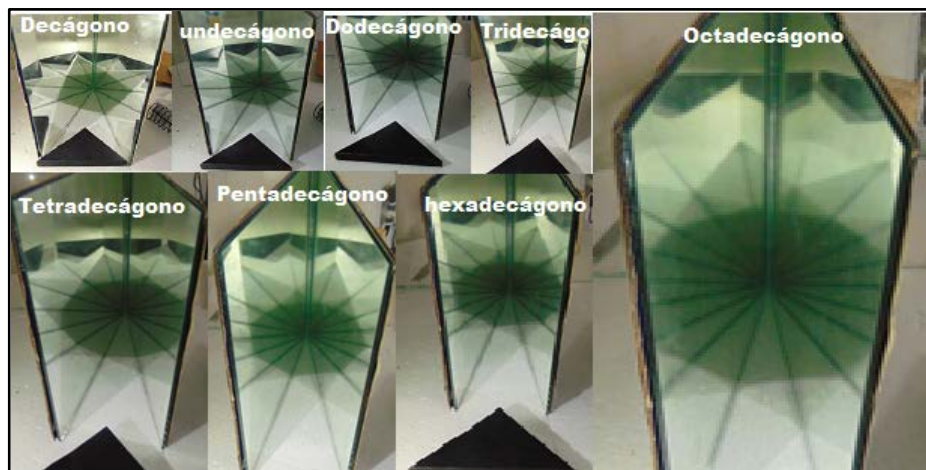
Simetria por reflexão, usando um triângulo equilátero, as figuras que podem ser visualizadas são: triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono, decágono, undecágono, dodecágono, tridecágono, tetradecágono, pentadecágono, hexadecágono, octadecágono, entre outros. Essas são formadas a partir do reflexo de simetria em espelho, como pode ser observado nas figuras 49 e 50.

Figura 49 - Visualizando polígonos através de simetria com espelhos



Fonte: Elaboração própria.

Figura 50 - Visualizando polígonos através de simetria com espelhos



Fonte: Elaboração própria.

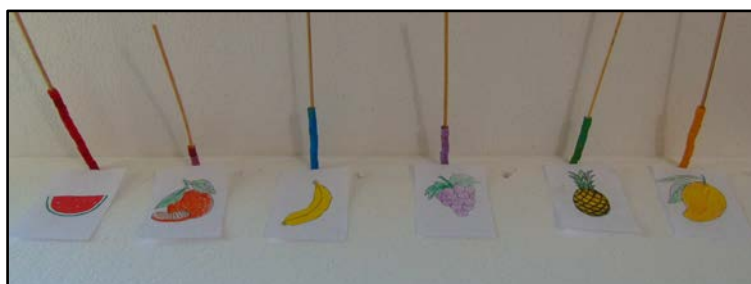
Inúmeras são as possibilidades quando se pensa no trabalho com material manipulável no processo de ensino aprendizagem. Passamos a discussão dessas perspectivas para os objetos de conhecimento de grandezas e medidas, probabilidade e estatística.

### 3.3 Probabilidade e Estatística

A medição é um conceito presente em todos os lugares ao nosso redor. Precisamos reconhecer e quantificar diferenças de tamanho, peso e outros atributos mensuráveis. Assim como, representar graficamente dados; saber fazer gráficos é uma habilidade matemática, e dominar essa habilidade auxilia no desenvolvimento de outras habilidades matemáticas, que incluem: organização, análise, classificação, contagem e comparação.

Uma introdução a esse conteúdo pode começar com os alunos construindo seus próprios gráficos. Podemos, por exemplo, dispor frutas (ou outros objetos) representados em imagem, e perguntar aos alunos qual fruta favorita deles, definindo que só podem escolher uma única fruta. A partir disso, coletamos dados - dispor as frutas e cada aluno coloca um contador na fruta que ele mais gosta, apresentar esse processo usando imagens ajuda na percepção visual dos dados, conforme mostra a figura 51.

Figura 51 - Gráfico da quantidade de alunos por frutas



Fonte: Elaboração própria.

Depois de marcadas as frutas favoritas, essa contagem é uma maneira de organizar e representar os dados. Nesse caso usamos palitos de churrasco, isopor e contadores de macarrão coloridos, para representar o nosso gráfico. Agora que temos as informações que reunimos (quantos estudantes escolheram cada fruta),

podemos passar à elaboração do gráfico, exemplificado na figura 52, o gráfico em malha quadriculada.

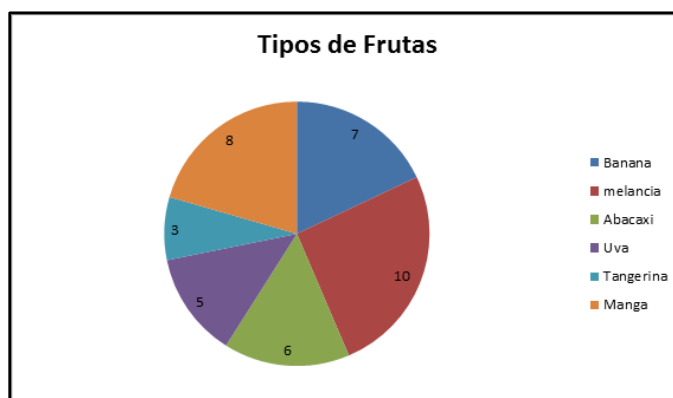
Figura 52 – Gráfico de barras vertical dos tipos de frutas favoritas



Fonte: Elaboração própria.

Além dessa possibilidade de apresentação gráfica, há também a de fazê-lo usando ferramentas computacionais, como apresentado na figura 53.

Figura 53 - Gráfico de Pizza dos tipos de frutas favoritas



Fonte: Elaboração própria.

Com o gráfico fica mais fácil visualizar, ler e interpretar informações. Existem inúmeros tipos diferentes de gráficos, todos eles são usados por diferentes razões, mas todos eles tornam as informações mais fáceis de visualizar. Permitir que os estudantes construam seus próprios gráficos a partir de informações do seu dia a dia, faz com que o estudante não só analise um gráfico de dados num livro, mas entenda seu processo de construção.

Para tanto, podemos usar palitos coloridos, contadores de cores diferentes e pedir que calculem quantos palitos ou contadores diferentes temos. Na elaboração do gráfico podemos adicionar legendas a porcentagem de cada cor e assim ir construindo essas informações. É possível, ainda, criar pesquisas individuais próprias, que envolvem coisas do dia a dia (quantas vezes fui ao cinema durante 6 meses, por exemplo). Além disso, fazer análises conjuntas ou individuais dos gráficos para verificar a compreensão do que é analisar dados e fato.

O uso de materiais concretos permitem a materialização do conteúdo, partindo do concreto para o abstrato. A matemática é muitas vezes classificada como difícil em porque é abstrata. Uma abordagem que ajude os alunos a aprenderem ideias e conceitos e construam sua aprendizagem através dos seus próprios conhecimentos para introduzir conceitos abstratos é uma forma de aprendizagem que parece ser mais significativa.

O mesmo material manipulável permite trabalhar diferentes objetos de conhecimento matemáticos. No experimento da figura 54, por exemplo, usamos uma embalagem de ovos reciclada e pintada nas cores azul, verde e vermelho e usamos contadores do material dourado para fazer os lançamentos. A proposta é que o aluno calcule a sua probabilidade de acertar cada cor (pode-se trabalhar probabilidade, números, decimais, gráficos e porcentagem). Nesse caso, a probabilidade está relacionada ao número de lançamentos (50).

Figura 54 - Resultado do experimento de probabilidade



Fonte: Elaboração própria.

Observemos a tabela 3, com as informações acerca desse experimento.

Tabela 3 – Experimento de probabilidade em 50 lançamentos

| Cor      | Quantidade de acertos por cor | Probabilidade de acertos por cor                                                                                       | Em decimais | Em porcentagem |
|----------|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|----------------|
| Verde    | 14                            | $\frac{14}{50}$                                                                                                        | 0,28        | 28%            |
| Azul     | 6                             | $\frac{6}{50}$                                                                                                         | 0,12        | 12%            |
| Vermelho | 2                             | $\frac{2}{50}$                                                                                                         | 0,04        | 4%             |
| Fora     | 28                            | $\frac{28}{50}$                                                                                                        | 0,56        | 56%            |
| Total    | 50                            | $\frac{14}{50} + \frac{6}{50} + \frac{2}{50} + \frac{28}{50} =$ $= \frac{14 + 6 + 2 + 28}{50}$ $= \frac{50}{50}$ $= 1$ | 1           | 100%           |

Fonte: Elaboração própria.

Além dos conteúdos típicos dos objetos de conhecimento da matemática, um aspecto importante que devemos trabalhar é a história da matemática. O conhecimento sobre o desenrolar histórico permite que entendamos como chegamos aos cálculos que temos hoje, como as civilizações começaram a desenvolver matemática, e as diversas contribuições que foram ocorrendo ao longo do tempo.

Nesse sentido, foi desenvolvida uma atividade com a construção dos livros. Iniciou com pesquisa sobre a trigonometria e as diversas contribuições que os matemáticos deram para seu desenvolvimento, e posteriormente a parte escrita. Ademais da compreensão matemática, esta atividade incentiva leitura, escrita e pensamento crítico. Na figura 55 mostra-se o resultado dessa atividade.

Figura 55 – Construção de Livro história da trigonometria



Fonte: Acervo próprio.

Isto posto, passamos ao relato da experiência de trabalhar com materiais manipuláveis nos anos finais do Ensino Fundamental.

### 3.4 Experiência de trabalhar com materiais manipuláveis

O estudo realizado permitiu ressaltar que, a respeito do uso de materiais manipuláveis no Ensino Fundamental ano finais, as atividades propostas incentivam a participação dos alunos, promovem interações do grupo. Além disso, são estratégias metodológicas de baixo custo que possibilitam aulas interativas e dinâmicas, bem como inclusão.

Ao longo dos 5 meses de estágio em 4 turmas do ensino fundamental, que me proporcionaram experiência e conhecimento a respeito do ambiente escolar especificamente da sala de aula, de como é o processo de ensino e aprendizagem na prática. As turmas eram totalmente diferentes o que ajudou no meu desenvolvimento pessoal e profissional, pois me permitiu observar que o processo de aprendizagem de cada aluno também é diferente, me desafiando a buscar um aprofundamento dos conhecimentos matemáticos e instigando a pesquisar materiais manipuláveis que pudessem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem o que enriqueceu demais minha experiência nas regências e no projeto interventor.

Durante o processo observamos que a aprendizagem foi significativa, no que se refere à compreensão dos conteúdos matemáticos, com a utilização dos materiais manipuláveis. Percebemos, também, que o aprendizado tem formas diferentes de ocorrer em sala de aula. Assim, muitas vezes, é necessário utilizar diversas metodologias. O uso de materiais manipuláveis sinalizam para uma melhora na apreensão dos conteúdos matemáticos. Assim, esses recursos fizeram a diferença no aprendizado, pois através da manipulação eles puderam visualizar o que estavam aprendendo.

Trabalhar com materiais manipuláveis possibilita a experimentação. Sua utilização têm necessidade de reflexão contínua visando melhorias do processo de ensino aprendizagem de matemática. Por meio desta pesquisa, percebemos que podemos trabalhar conceitos do cotidiano do aluno, para que ele compreenda e produza seus conhecimentos, oportunizando o desenvolvimento de sua cidadania, dignidade, habilidades e competências enquanto ser humano.

Usar materiais manipuláveis, requer do professor(a) estudo e planejamento do material e de sua utilização (conhecimento a respeito do material e de sua aplicação), envolvendo os recursos que vamos usar e os conceitos que iremos ensinar. Esses materiais podem ser desenvolvidos ou comprados, alguns são de baixo custo e podemos utilizá-los para diferentes conteúdos. Entretanto, a utilização desses materiais não garante o aprendizado; outrossim, a forma como os utilizamos e as interações e relações dos alunos com eles favorecem o ensino aprendizagem de conceitos matemáticos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS.

A educação é muito importante para o desenvolvimento, despendemos muito tempo nos dedicando para obter uma educação formal e diferentes certificados, nem todos os alunos gostam de aprender em uma sala de aula formal, nem todos são amantes da leitura ou de cálculos e até mesmo os que gostam de aprender ficam com medo na hora de serem avaliados em provas e trabalhos. Refletir sobre nossas aulas é uma chave para nos ajudar a ser professores melhores e ensinar nossos alunos a aprender.

Podemos nos fazer perguntas como, o que ocorre bem durante a aulas? O que poderia melhorar? Com o que os alunos tiveram dificuldade? Como posso melhorar? O que fazer de diferente? Essas Perguntas nos auxiliam a melhorar nosso planejamento e, conseqüentemente, nossas aulas. Nos perguntar o que melhorar para o próximo ano letivo, gerenciar nosso desenvolvimento enquanto professor faz parte do nosso cotidiano.

Iniciamos nosso processo de aprender matemática bem antes de ir a escola, os conhecimentos matemáticos são componentes essenciais para o exercício pleno da cidadania. Na escola, os jogos e atividades matemáticas podem ajudar os alunos a desenvolverem seu conhecimento matemático, uma vez que oportunidades de praticar e falar sobre matemática em contextos descontraídos torna a matemática menos assustadora e pode auxiliar no desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, compreensão de regras e a praticar desafios matemáticos.

O processo de criação de materiais manipuláveis envolve muita pesquisa, que vai desde o seu desenvolvimento até a aplicação em sala de aula, envolve a necessidade que os alunos têm no momento em que estão estudando. Depois da aplicação precisamos analisar se de fato contribuiu para o aprendizado e quais as possíveis melhorias. Envolve, pois, nossa base de estudos, conhecimentos necessários da teoria e abordagem para ensinar.

Segundo relatório da Unesco a educação do século XXI possui quatro pilares fundamentais: aprender a conhecer, fazer, viver junto e aprender a ser. Aprender a conhecer significa que devemos adquirir os instrumentos da compreensão e isso implica em conhecer o mundo que nos rodeia; ao aprender a

aprender estamos exercitando a atenção a memória o pensamento; aprender a fazer implica termos poder para influir sobre o nosso próprio entorno implicando na nossa capacidade de fazer frente às interações, a trabalhar em grupo e desenvolver habilidades profissionais para o mundo do trabalho; aprender a viver juntos significa participar e cooperar com outras pessoas implicando na compreensão do outro, vivendo o pluralismo, a compreensão e paz. Aprender a ser significa desenvolver nossa própria personalidade, é um processo fundamental que recorre aos anteriores nos dando autonomia e responsabilidade enquanto ser humano.

Quando o aluno está no centro do seu aprendizado ele se responsabiliza pelo seu aprendizado, se tornando protagonista do processo de aprender, ao invés de somente o professor se responsabilizar pelo aprendizado dele. Ensinar e aprender são processos complexos e interdependentes que envolvem vários aspectos teóricos, práticos, materiais e metodológicos. Um aspecto relevante é a avaliação desses materiais, para isso é necessário clareza sobre os objetivos de aprendizagem.

Ensinar a pensar é essencial neste processo, incentivar e provocar a curiosidade, de tal maneira que ele questione, trabalhe de forma coletiva, posicione-se criticamente em relação ao objeto de estudo. Conhecer metodologias e recursos didáticos são essenciais para quem ensina, pois possibilita que nos organizemos no ambiente escolar, e possamos direcionar adequadamente a aprendizagem.

Nesse sentido, esta pesquisa apresenta possibilidades de uso de materiais manipuláveis para o ensino de matemática. Esse assunto não foi aqui esgotado, outrossim, vislumbramos a possibilidade mais pesquisas que explorem o horizonte desses materiais no campo do ensino aprendizagem de matemática.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, C. M.a F. **O Estudo da Simetria Através da Arte de Maurits Escher**. Rio de Janeiro: IMPA, PROFMAT, 2014. p. 27-28. Disponível em: <[https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/claudia\\_fiuza.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/claudia_fiuza.pdf)>. Acesso em: 11 jun. 2020.
- ANDRINI, A. VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática**. 4 ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2017.
- ASSIS, A. K. T. **Arquimedes o Centro de gravidade e a Lei da Alavanca**. 1 ed., Campinas SP: Unicamp , 2008.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 24 mar. 2020.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: 1951.
- MENDES, D.. **Classificador de Ângulos**. Rede laboratório sustentável de matemática. 2015. Disponível em: <<https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2015/03/classificador-de-angulos.html>>. Acesso em: 22 nov. 2018.
- DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 4 ed. São paulo: Ufsc, 2017.
- GOW, J. **A Short History of Greek Mathematics**. Michigan: Jornal Universitário, 1884. p. 50. Disponível em: <<https://archive.org/details/ashorthistorygr00gowgoog/page/n50/mode/2up>>. Acesso em: 30 mai. 2020.
- HEATH, T. **A History of Greek Mathematics**. Volume I From Thales to Euclid. Londres: Oxford Clarendon press, 1921. p. 57.
- IEZZI, G. DOMINGUES, H. H. **Álgebra Moderna**. 4ª ed. São paulo: Atual, 2003. p.35-36.
- IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- LAËRTIOS, D. **Vidas e doutrinas dos filósofos Ilustres**. 2 ed., Brasília: UNB, 2008.
- LEMONIDIS, C. et al. **A Matemática da Escola Primária** matemática da natureza e da vida. Macedônia Ocidental: Access graphic Arts SA, 2007- 2013. p. 29. Disponível em:

<[http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2170/Mathimatika\\_G-Dimotikou\\_html-empl/index5\\_29.html](http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2170/Mathimatika_G-Dimotikou_html-empl/index5_29.html)>. Acesso em: 14 abr. 2020.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São paulo: Cortez, 2006. p. 29  
Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/0B1Cd9oH5xwRWRG5NdmZ2ck5JM3M/view>>.  
Acesso em: 30 de mar. de 2020.

MOURA FILHO, A. L. **Pelo inglês afora**: carreira profissional e autonomia na aprendizagem de inglês como língua estrangeira, 2005.

NACARATO, A. M. **Eu Trabalho Primeiro no Concreto**. Revista de Educação brasileira. 2004-2005. Disponível em:  
<[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4291874/mod\\_resource/content/1/Nacarato\\_eu%20trabalho%20primeiro%20no%20concreto.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4291874/mod_resource/content/1/Nacarato_eu%20trabalho%20primeiro%20no%20concreto.pdf)>. Acesso em 29 Set. 2020.

NIKOLANTONAKIS, K., LEMONIDIS, C. **La multiplication Grecque**: Un algorithme D'origine historique et son enseignement a L'education Grecque. Macedônia Ocidental: Access graphic Arts SA, 2007- 2013. Disponível em:  
<[http://emf.unige.ch/files/1114/5328/8920/EMF2009\\_GT4\\_Lemonidis.pdf](http://emf.unige.ch/files/1114/5328/8920/EMF2009_GT4_Lemonidis.pdf)>. Acesso em: 24 set. 2020.

FREIRE, P. **O caminho se faz caminhando**. 2 ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2003.

SAMPAIO, A. C F. JESUS, C. M. R. **A primeira Determinação do Comprimento da Circunferência da Terra**. Brasil: XII congresso de Cartografia, 1995. Disponível em:<[http://rmct.ime.eb.br/arquivos/RMCT\\_4\\_tri\\_1995/prim\\_det\\_comp\\_circunf\\_terra.pdf](http://rmct.ime.eb.br/arquivos/RMCT_4_tri_1995/prim_det_comp_circunf_terra.pdf)>. Acesso em: 20 set. 2020.

SERRAZINA, L. **Didáctica da Matemática** [Em linha]: Os materiais e o ensino da matemática. realização de Paulo Cartaxo; Tecnóloga Isabel Ribeiro. Consultoria científica de José Manuel Matos. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.1 prog. video (2 min., 39 seg.). Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10400.2/4945>>. Acesso em: 20 mar. 2020.

SINGH, S. **Big Bang** tudo sobre a mais importante descoberta de todos os tempos e por que esse conhecimento é indispensável. Rio de Janeiro, São Paulo: Record, 2006.

UNESCO. **Educação Um Tesouro A Descobrir** Relatório Para a Unesco da Comissão Internacional Sobre Educação Para o Século XXI. São Paulo: Cortez, 1998. p. 89-101. Disponível em:  
<[http://dhnet.org.br/dados/relatorios/a\\_pdf/r\\_unesco\\_educ\\_tesouro\\_descobrir.pdf](http://dhnet.org.br/dados/relatorios/a_pdf/r_unesco_educ_tesouro_descobrir.pdf)>  
Acesso em: 25 set. 2020.

WEISZ, T. **O Diálogo Entre o Ensino e a Aprendizagem**. 2 ed. São paulo: Ática, 2001.

ZABALA, A.. **A Prática Educativa** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.