



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS.
CAMPUS PALMAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

SAULO OLIVEIRA MACÊDO

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DE CONTROLE DE
SISTEMAS LINEARES BASEADOS EM LMIs**

**Palmas - TO
2017**

SAULO OLIVEIRA MACÊDO

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DE CONTROLE DE
SISTEMAS LINEARES BASEADOS EM LMIs**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
coordenação do curso de Licenciatura em Mate-
mática do Instituto Federal do Tocantins - Cam-
pus Palmas, como exigência à obtenção do grau
de graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wallysonn Alves de
Souza

**Palmas-TO
2017**

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvida pelo Serviço Técnico da Biblioteca João Paulo II

Macêdo, Saulo Oliveira

Fundamentos matemáticos da teoria de controle de sistemas lineares
baseados em LMIs / Saulo Oliveira Macêdo. - Palmas, 2017

46 f.

Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação
Ciência e Tecnologia do Tocantins - Campus Palmas, 2017.

Orientador(a): Prof. Wallysonn Alves de Souza

1. Sistema de controle. 2. Estabilidade. 3. LMIs. 4. Aplicações matemáticas. I. Título

SAULO OLIVEIRA MACÊDO

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA DE CONTROLE DE
SISTEMAS LINEARES BASEADOS EM LMIs**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à coordenação do curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal do Tocan-
tins - Campus Palmas, como exigência à ob-
tenção do grau de graduação em Licenciatura
em Matemática.

Orientado: Prof. Dr. Wallysonn Alves de
Souza

Aprovado em: ____/____/____

BANCA AVALIADORA

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza
IFTO-Campus Palmas

Prof. Me. José Ailton Rodrigues Soares
IFTO-Campus Palmas

Profa. Dra. Rizia Rodrigues da Silva
IFTO-Campus Palmas

*Ao Senhor meu Deus, meu Criador e Salvador,
que me concede a graça da sabedoria e do co-
nhecimento. Que me concedeu forças nesta jor-
nada, me capacitando a chegar ao fim desta li-
cenciatura, preparado para os desafios que vi-
rão.*

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para que eu pudesse chegar até aqui. Em especial, agradeço:

- À minha amada esposa Renata Cristina Andrade da Silva Macêdo, às minhas filhas Juliane Andrade Macêdo e Viviane Andrade Macêdo, pessoas que me transformaram em um ser humano mais feliz e realizado, merecem um agradecimento muito especial, pois tiveram que abrir mão da minha presença em casa, para que eu pudesse está me dedicando a este curso.
- Aos meus pais Ayram Bispo de Macêdo e Lusia Oliveira Macêdo, que me instruíram e me deram condições para que eu me tornasse o ser humano que sou.
- Aos meus irmãos Ricardo Oliveira Macêdo e família, e Fábio Oliveira Macêdo e família.
- Ao Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza, excelente professor, exemplo de dedicação e amor ao que faz, por quem tenho profundo respeito e admiração, por sua maneira de conduzir o ensino aprendizagem, pela paciência dedicada na orientação para conclusão deste trabalho.
- Aos Professores como um todo que fazem parte da Licenciatura em Matemática Tiago Bandeira Castro, Edson Luiz Kraemer, Mágnio Márcio de Azevedo, Rodrigo Carvalho Dias, José Ailton Rodrigues Soares, Cesar De Oliveira Zica, Jamerson Montenegro Lima, Claudia Maria Alves Pegado, por terem me concedido inspiração e a assistência quanto professores.
- Aos meus companheiros de jornada, Zilne, João Rubens, Gilberto, Renan, Osli, Lauro, Heronita, Dayana, Fenycia, Anne, Patrick que me acompanham e fizeram parte dessa jornada.
- A todos os professores e funcionários do IFTO.
- Ao IFTO - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo dos fundamentos matemático envolvidos na teoria de controle de sistemas lineares invariantes no tempo, com análise e projeto de controladores baseados em desigualdades matriciais lineares LMIs (do inglês “*Linear Matrix Inequalities - LMIs*”). São estudados vários conceitos para fundamentar a proposta deste trabalho, inicialmente é realizado um estudo sobre alguns tópicos da álgebra linear como, por exemplo, matrizes, autovalores, matriz simétrica definida positiva e forma quadrática. Em seguida, são estudados os conceitos de estabilidade no sentido de Lyapunov, função de Lyapunov, LMIs e estabilidade de sistemas lineares via LMIs. Após a fundamentação matemática, foi possível estabelecer condições de estabilidade de sistemas lineares realimentados, com projeto baseado em LMIs. Por fim, foi proposta uma aplicação em um sistema bola viga, que é um sistema muito utilizado para testar projetos de controle. As simulações numéricas foram realizadas utilizando o *software* matemático *Matlab*, e comprovaram a eficiência da metodologia apresentada.

Palavras-chaves: Sistema de controle. Estabilidade. LMIs. Aplicações matemáticas.

Abstract

This work aims to study the mathematical fundamentals involved in the theory of control of time invariant linear systems, with analysis and design of controllers based on Linear Matrix Inequalities (LMIs). Several concepts are studied to support the proposal of this work, initially a study is made on some topics of linear algebra for instance matrices, eigenvalues, positive definite symmetric matrix and quadratic form. Next, the concepts of Lyapunov stability, Lyapunov function, LMIs and stability of linear systems via LMIs are studied. After the mathematical reasoning, it was possible to establish stability conditions of linearized systems, with design based on LMIs. Finally, an application was proposed in a ball beam system, which is a widely used system for testing control designs. Numerical simulations were carried out using mathematical software, and proved the efficiency of the presented methodology.

Key-words: Control system. Stability. LMIs. Mathematical applications.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Estável mecanicamente no sentido de Lyapunov.	29
Figura 2 – Instável mecanicamente no sentido de Lyapunov.	29
Figura 3 – Estável.	30
Figura 4 – Assintoticamente Estável.	31
Figura 5 – Sistema Instável.	32
Figura 6 – Região de factibilidade da LMI (3.9), considerando $x = x_2$ e $y = x_1$. . .	35
Figura 7 – Sistema BolaViga.	38
Figura 8 – Gráfico função Lyapunov.	40
Figura 9 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [0.5 \ 0.3 \ 0.2 \ 0]$	41

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros do sistema Bola Viga.	39
---	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE ÁLGEBRA LINEAR .	17
2.1	Matrizes	17
2.1.1	Matriz Coluna	17
2.1.2	Matriz Linha	17
2.1.3	Matriz Retangular	18
2.1.4	Matriz Quadrada	18
2.1.5	Matriz Identidade Quadrada	18
2.1.6	Matriz Triangular	18
2.1.7	Matriz Transposta	19
2.1.8	Matriz Inversa	19
2.1.9	Matriz Simétrica	19
2.2	Multiplicação com Matrizes	20
2.2.1	Multiplicação de um número por uma matriz	20
2.2.2	Multiplicação entre Matrizes	20
2.3	Autovetor e Autovalor de um operador linear	21
2.3.1	Determinação dos autovetores e autovalores	22
2.4	Matriz Simétrica Definida Positiva	23
2.5	Sistema de Equações Lineares	24
2.5.1	Equação Linear	25
2.6	Forma Quadrática	25
2.6.1	Classificação da Forma Quadrática	26
3	ESTABILIDADE	29
3.1	Estabilidade Quadrática	29
3.2	Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs	33
3.2.1	Convexidade	33
3.3	Estabilidade de sistemas lineares via LMIs	35
3.4	Estabilidade de sistemas lineares realimentados	36
4	APLICAÇÃO: SISTEMA BOLA VIGA	38
4.1	Simulações	40
5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	43

A	APÊNDICE A	45
----------	-----------------------------	-----------

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho será iniciado com um breve exemplo de sistema de controle manual no dia a dia, que servirá de referência para ilustrar o que é um sistema de controle.

Segundo Gonsioroski (2012) num dia frio em que vamos tomar um banho e precisamos regular a temperatura do chuveiro elétrico o que se deseja é ajustar a temperatura da água o mais próximo possível de um valor desejado pelo nosso corpo. Nesse contexto o sistema de controle está ali fazendo parte do cotidiano, ao abrir o registro, a água passa pelo cano e entra no chuveiro, fazendo com que a resistência elétrica seja acionada, consequentemente aquecendo a água. Analisando o processo, percebe-se que a temperatura da água vai ser inversamente proporcional a quantidade de água que passa pela resistência do chuveiro, ou seja, quanto menor o fluxo de água passando pela resistência, maior é a temperatura. Então, para obter água mais quente deve-se reduzir a vazão no chuveiro, até alcançar uma temperatura que o corpo estabeleça como ideal para o banho. Nesse exemplo pode ser destacado peças importantes no sistema de controle: o controlador que é o cérebro, o atuador que é a mão abrindo e fechando o registro do chuveiro, o sensor que será a pele sentindo a temperatura da água e mandando as informações para o cérebro. Esse é um exemplo de sistema de controle manual. Estamos cercados por sistemas de controle, todos os dias deparamos com sistemas controlados automaticamente: um elevador em um prédio, braços mecânicos robotizados em processos industriais, satélites de comunicação, ar condicionado, etc.

Este trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos e fundamentos matemáticos da teoria de controle de sistemas lineares, com projetos baseados em desigualdades matriciais. A teoria de controle que trata do comportamento de sistemas dinâmicos tem se destacado como um importante campo de aplicações da matemática e vem sendo amplamente utilizada na sociedade moderna, desde simples aplicações até em sistemas altamente sofisticados. Assim, devido ao grande número de aplicações, o interesse no estudo de problemas vinculados à teoria de controle tem crescido e grande parte desses estudos foi inspirado pelo uso das LMIs, que é uma técnica moderna de análise e projeto de sistema de controle, no domínio do tempo, que utiliza a descrição de um sistema em termos de n equações diferenciais que podem ser escritas na forma matricial.

Para um sistema dinâmico qualquer ser controlado, é importante que se tenha um modelo matemático preciso e, ao desenvolver técnicas de sistema de controle, sejam elas clássicas ou modernas, é imprescindível que se perceba a importância da Matemática para sua fundamentação. Com essa visão é que será destacada uma seção onde são expostos os conceitos fundamentais da Álgebra Linear necessários para a compreensão e formulação dos problemas baseados em LMIs.

Segundo Souza (2013),

Nos últimos anos tem crescido muito o interesse no estudo de problemas vinculados à teoria de controle. Boa parte destes estudos estão relacionados com análises de estabilidade e o projeto de novos controladores. De uma forma geral, o grande número de estudos foi inspirado pelo uso das Desigualdades Matriciais Lineares, que aqui, serão chamadas de LMIs (do inglês “*Linear Matrix Inequalities - LMIs*”). Segundo (BOYD *et al.*, 1994), a história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos remonta há mais de 100 anos, e começa em cerca de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que hoje chamamos de teoria de Lyapunov. Naquela época, o teorema de Lyapunov, adaptado para sistemas lineares contínuos no tempo, poderia ser formulado diretamente em termos de LMIs. Mas, principalmente na década de 1980 foram abertos caminhos para que problemas de controle pudessem ser convertidos em problemas convexos, como por exemplo, com o trabalho de (BERNUS-SOU; PERES; GEROMEL, 1989). A partir daí, garantir que um sistema linear realimentado é estável é equivalente a encontrar um ganho estabilizante K e uma matriz de Lyapunov P simétrica definida positiva. Em seguida, apareceram novas condições baseadas em LMIs que garantiam a estabilidade assintótica global de sistemas não lineares.

Intuitivamente, a estabilidade de um sistema dinâmico está relacionada com a função energia deste sistema. Se a função energia do sistema é sempre negativa e decresce com relação ao tempo, as trajetórias tendem à origem (KHALIL, 1996).

A chamada Estabilidade Quadrática, isto é, a existência de uma única função de Lyapunov, independente dos parâmetros incertos, assegurando a estabilidade do sistema para o domínio de incertezas considerado, foi talvez o resultado mais importante da década de 80 (BARMISH, 1983). A partir das condições de estabilidade quadrática, inúmeros resultados de análise, controle e filtragem robusta com critérios de desempenho puderam ser desenvolvidos. Essas condições quase sempre formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares, tornaram-se facilmente resolvíveis numericamente com o aparecimento de pacotes computacionais especializados (GAHINET *et al.*, 1995).

A princípio, caracterizar um problema de controle ou filtragem na forma de um problema baseado em LMIs significa na prática a sua solução, mesmo que não existam soluções analíticas disponíveis (BOYD *et al.*, 1994). Pode-se dizer que as formulações por LMIs possuem a mesma importância na teoria de controle robusto que as equações de Lyapunov e Riccati na teoria de controle moderna e as ferramentas gráficas, como os diagramas de Bode, Nyquist e Nichols, na teoria de controle clássica (DOYLE *et al.*, 1989). Representar todas as especificações do sistema sendo projetado através de um único objetivo de controle é bastante restritivo. Deste modo, outra vantagem importante da abordagem por LMIs é que, como elas aparecem na forma de restrições no problema de projeto, elas oferecem maior flexibilidade para combinar várias especificações sobre o sistema a ser projetado (BOYD *et al.*, 1994).

Segundo Nise e Silva (2002) a função de transferência é uma forma de modelagem matemática de um sistema, que complementa a equação diferencial. A função de transferência é usada para sistemas lineares, e conduz a uma informação mais intuitiva que a equação diferencial. Assim será possível variar os parâmetros do sistema e rapidamente

perceber os efeitos destas mudanças na resposta do sistema. A função de transferência é também útil na modelagem da interconexão de subsistemas através da formação de um diagrama de blocos, com uma função matemática no interior de cada bloco.

Uma outra forma de modelagem matemática e que será utilizada neste trabalho, é a representação no espaço de estados ou forma matricial. Uma vantagem dos métodos no espaço de estados é que podem ser usados para modelar sistemas para simulação em computadores. Basicamente, esta representação transforma uma equação diferencial de n -ésima ordem em um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem.

Segundo Nise e Silva (2002) o computador tem um papel de relevância a ser destacado no projeto de sistemas de controle modernos. Atualmente dispõe-se de computadores e programas que fazem os cálculos fatigantes das tarefas. Em um computador de mesa pode-se realizar análise, projetar e simular com um programa esse projeto, podendo fazer mudanças e imediatamente testar as alterações. Um exemplo deste tipo de cálculo fatigante ficará por conta de encontrar uma matriz definida positiva e um ganho para o sistema realimentado, que será realizado via *Matlab*.

A metodologia estudada neste trabalho utiliza a função quadrática de Lyapunov e a estabilidade quadrática é utilizada para projetar o ganho do controlador, baseado em LMIs. O controlador proposto é composto por um único ganho K .

Por isso, este trabalho foi dividido da seguinte forma:

No capítulo 2 serão abordados alguns conceitos da Álgebra Linear necessários para servir de base para o desenvolvimento do trabalho. A Álgebra Linear ocupa papel importante nas diversas áreas da Matemática, da Análise à Estatística, onde se utilizam constantemente o Cálculo Matricial. A importância da Álgebra Linear tem crescido nas últimas décadas, os modelos matemáticos lineares assumiram um importante papel juntamente com o desenvolvimento da informática e esse desenvolvimento estimulou um notável crescimento de interesse em Álgebra Linear.

As matrizes serão conceituadas conforme suas características, destacando a matriz simétrica definida positiva, que neste trabalho terá um papel relevante. Será estudado os autovalores, que será fundamental para definição de uma matriz definida positiva, as formas quadráticas, que por suas característica tem um papel muito importante na análise de estabilidade de Lyapunov. Os conceitos da Álgebra Linear serão utilizados também como base para fundamentação das proposições, teoremas e exemplos que contribuirão para alcançar o objetivo deste trabalho.

No capítulo 3 é apresentada uma abordagem de Estabilidade, e dentre elas serão descritos a Estabilidade quadrática, as Desigualdades Matriciais Lineares, a Estabilidade de Sistemas Lineares via LMIs e a Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados. No decorrer do estudo será visto, que quando se trata de sistema de controle, a estabilidade é geralmente o fator mais importante a ser determinado.

No capítulo 4 o trabalho será focado na aplicação, onde é descrito um sistema bola

viga e as equações diferenciais que governam tal sistema. Serão utilizados, os conceitos descritos neste trabalho para reescrever as equações diferenciais na forma matricial, fazer em seguida a troca das variáveis de estado e de posse das constantes definidas para o sistema em questão, serão extraídas as matrizes que regem o sistema. A simulação numérica da aplicação do sistema bola viga terá como finalidade exemplificar a metodologia apresentada, e foram realizadas implementações computacionais através do *software Matlab*.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho e as expectativas quanto ao futuro desta metodologia.

Ao final, são mostrados Apêndice A, os algoritmos usados no *Matlab* para a resolução das LMIs que fizeram parte da simulação numérica deste trabalho.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE ÁLGEBRA LINEAR

Para iniciar os estudos, vai ser feito o uso de alguns conceitos que serão de fundamental importância no decorrer deste trabalho.

2.1 Matrizes

Chama-se matriz de ordem m por n a um quadro de $m \times n$ elementos, (números, polinômios, funções, etc.) dispostos em m linhas e n colunas. Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes.

Seja A uma matriz de m linhas por n colunas, podemos representar esta matriz da seguinte forma:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde i indica a linha e j indica a coluna a que o elemento pertence.

2.1.1 Matriz Coluna

Uma matriz é dita matriz-coluna, quando possui uma única coluna ($n = 1$).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Observação 2.1.1. *Essa matriz representa as componentes vetoriais de um vetor em um espaço vetorial de dimensão n , e por isso pode ser chamada de vetor coluna*

2.1.2 Matriz Linha

Uma matriz é denominada de matriz-linha, quando possui uma única linha ($m = 1$).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Observação 2.1.2. *Essa matriz pode ser chamada de vetor linha.*

2.1.3 Matriz Retangular

Uma matriz é dita retangular quando o seu número de linhas é diferente do número de colunas ($m \neq n$).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2.1.4 Matriz Quadrada

Uma matriz é dita quadrada quando o seu número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$). Por conseguinte, diz-se que a matriz é de ordem $n \times n$ ou simplesmente de ordem n . Matematicamente, escreve-se: $A_{n \times n}$.

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2.1.5 Matriz Identidade Quadrada

Uma matriz é dita identidade quadrada quando apresenta na disposição de seus elementos $a_{ij} = 1$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.6 Matriz Triangular

Uma matriz é dita **triangular superior** se essa matriz é quadrada e todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplo 2.1.1. As matrizes A e B abaixo são exemplos de matriz triangular superior e inferior, respectivamente

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

2.1.7 Matriz Transposta

A matriz transposta da matriz A , de ordem m por n , é uma matriz denotada por A^T , de ordem n por m , que se obtém da matriz A permutando as linhas pelas colunas de mesmo índice. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Então,

$$A^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Propriedade 2.1.1. *Propriedades da Matriz Transposta:*

- i) $(A + B)^T = A^T + B^T$, a transposta de uma soma de matrizes é igual à soma das transpostas dessas matrizes;*
- ii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, a transposta do produto de um escalar por uma matriz é igual ao produto do escalar pela matriz transposta, onde λ é qualquer escalar;*
- iii) $(A^T)^T = A$, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma;*
- iv) $(AB)^T = B^T A^T$, a transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas de cada uma das matrizes, em ordem inversa.*

2.1.8 Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , dizemos que A é inversível ou não singular se, e somente se, existe uma matriz B , também de ordem n , de modo que:

$$AB = BA = I_n,$$

caso essa matriz B exista, é única e chama-se inversa de A , e será representada por A^{-1} .

Observação 2.1.3. *Caso a matriz A não possua inversa, dizemos que A é singular, ou não invertível.*

2.1.9 Matriz Simétrica

Uma matriz é chamada de simétrica se, e somente se, é igual à sua transposta, isto é, se $A = A^T$.

Observação 2.1.4. Uma matriz quadrada de números complexos que é igual a sua transposta conjugada é dita **hermitiana**, em caso de ser formada de elementos reais, essa matriz é a simétrica.

2.2 Multiplicação com Matrizes

2.2.1 Multiplicação de um número por uma matriz

Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz real, e α um número real dado. O produto de α por A é uma matriz real $m \times n$ da forma

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Propriedade 2.2.1. Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. Para quaisquer que sejam os números reais α e β , valem as seguintes propriedades:

- i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
- ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$;
- iv) $1A = A$.

2.2.2 Multiplicação entre Matrizes

Definição 2.2.1. Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{rs}]_{n \times p}$ e $C = [c_{uv}]_{m \times p}$. A multiplicação da matriz A pela matriz B , será definida como: $AB = [c_{uv}]_{m \times p}$, sendo

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} b_{kv} = a_{u1} + \dots + a_{un} b_{nv}.$$

Observação 2.2.1. O produto entre duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$, só será possível, se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Assim, a matriz-resultado $C = AB$ será de ordem $m \times p$.

Observação 2.2.2. O elemento c_{uv} é obtido, multiplicando os elementos da u -ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da v -ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

Para ilustrar, seja $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 2}$, o produto AB é uma matriz $C_{2 \times 2}$ tal que:

$$C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Propriedade 2.2.2. *verificada a possibilidade de operação entre as matrizes, as seguintes propriedades são válidas:*

- i) a multiplicação de matrizes em geral não é comutativa ($AB \neq BA$);*
- ii) dada duas matrizes A e a matriz identidade I , ambas de ordem n , a multiplicação dessas matrizes é comutativa e a matriz produto é igual a matriz A , isto é, $AI = IA = A$;*
- iii) $A(B+C) = AB+AC$, vale a distributiva à esquerda da multiplicação, em relação a soma;*
- iv) $(A+B)C = AC+BC$, vale a distributiva à direita da multiplicação, em relação a soma;*
- v) $(AB)C = A(BC)$;*
- vi) $(AB)^T = B^T A^T$;*
- vii) $0A = 0$ e $A0 = 0$, sendo 0 a matriz nula.*

2.3 Autovetor e Autovalor de um operador linear

Definição 2.3.1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, sendo $v \neq 0$, é o autovetor do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que*

$$T(v) = \lambda v. \quad (2.1)$$

O número λ tal que $T(v) = \lambda v$ é denominado autovalor de T associado ao autovetor v .

Observação 2.3.1. *Por definição, um vetor $v \neq 0$ é o autovetor se a imagem $T(v)$ for um múltiplo escalar de v . No $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ diríamos que v e $T(v)$ têm a mesma direção. Assim, dependendo do valor de λ , o operador T dilata v , contrai v , inverte o sentido de v ou o anula no caso de $\lambda = 0$. Os autovetores também são chamados de vetores característicos ou vetores próprios e os autovalores também são chamados de valores característicos ou valores próprios.*

2.3.1 Determinação dos autovetores e autovalores

Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuja matriz na base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sendo v autovetor e λ autovalor do operador T , tem-se que:

$$Av = \lambda v,$$

então

$$Av - \lambda v = 0. \quad (2.2)$$

Sabendo que $v = Iv$, com I sendo a matriz identidade, substituindo em (2.2), segue que:

$$Av - \lambda Iv = (A - \lambda I)v = 0. \quad (2.3)$$

Note que essa equação resulta em um sistema homogêneo, pois todas as equações apresentam termos independentes iguais a zero, portanto, ele admite uma solução onde todas as variáveis são nulas.

Para que o sistema admita soluções não nulas, ou seja $v \neq 0$, devemos impor que

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.4)$$

Assim,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é chamada de equação característica, ou polinômio característico do operador T , ou da matriz A .

Os vetores $v \neq 0$ para os quais existe um λ que resolve a equação (2.3) são chamados de autovetores da matriz A .

Para se encontrar os autovetores basta substituir o valor do autovalor na equação original e encontrar o autovetor. O autovalor será, então, associado ao autovetor encontrado.

Na verdade, o autovetor encontrado forma uma base para o espaço de solução da equação (2.3), dado o respectivo autovalor. Logo, qualquer múltiplo do autovetor também é um autovetor.

Portanto, sendo A a matriz canônica que representa um operador linear T , tem-se:

- i) Os autovalores λ de T ou de A : são as raízes da equação (2.4),
- ii) Os autovetores v de T ou de A : para cada λ , são as soluções da equação (2.3), ou seja, $Av = \lambda v$.

Exemplo 2.3.1. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$ é um operador linear. Vamos encontrar seus autovalores e autovetores. Notamos que o operador T pode ser escrito da seguinte forma:*

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 5y \\ 2x + y \end{bmatrix},$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar os autovalores resolvemos a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$. Assim,

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 6.$$

Portanto, $\lambda = -1$ e $\lambda = 6$ são os autovalores do operador T e/ou da matriz A . Para encontrar os autovetores basta substituir cada autovalor λ encontrado no sistema (2.3).

Assim, para $\lambda = -1$,

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 - (-1) & 5 \\ 2 & 1 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y.$$

Então, $v_1 = (-y, y)$ sendo um de seus representantes o vetor $v_1' = (-1, 1)$.

Para $\lambda = 6$,

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 - 6 & 5 \\ 2 & 1 - 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{2}y.$$

Então, $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}y & y \end{bmatrix}^T$ sendo um de seus representantes o vetor $v_2' = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}^T$.

2.4 Matriz Simétrica Definida Positiva

Definição 2.4.1. *Dizemos que uma matriz simétrica $A_{n \times n}$, é definida se $x^T A x$ tiver apenas um sinal para todos os vetores não nulos em $\mathbb{R}^n$. Se,*

- i) $x^T A x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, dizemos que A é definida positiva;
- ii) $x^T A x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, dizemos que A é definida negativa;

iii) $x^T Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, dizemos que A é semidefinida positiva;

iv) $x^T Ax \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, dizemos que A é semidefinida negativa.

Teorema 2.4.1. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz real simétrica, dizemos que A é definida positiva se, e somente se, todos os seus autovalores são positivos.*

Demonstração. Se A é definida positiva e se λ é um autovalor de A , então, para qualquer autovetor x associado a A ,

$$x^T Ax = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{\|x\|^2} > 0.$$

Reciprocamente, suponha que todos os autovalores de A são positivos. Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto ortonormal de autovetores de A . Se x é um vetor não-nulo em $\mathbb{R}^n$, qualquer múltiplo não-nulo de x é um autovetor, já que

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x),$$

então x pode ser escrito como

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

onde

$$\alpha_i = x^T x_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 = \|x\|^2 > 0.$$

Tem-se que

$$x^T Ax = (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)^T (\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 \lambda_i \geq (\min \lambda_i) \|x\|^2 > 0$$

e portanto, A é definida positiva. □

Exemplo 2.4.1. *Considere a matriz A abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Então, utilizando (2.3) para encontrar os autovalores, tem-se que $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$, como ambos os autovalores são positivos, conclui-se que A é definida positiva.

2.5 Sistema de Equações Lineares

A solução de sistemas de equações lineares é provavelmente um dos problemas a ser destacado como de grande relevância na matemática. Grande parte dos problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais estão relacionados com a solução de sistema linear em alguma parte do processo.

2.5.1 Equação Linear

Chama-se de equação linear, à equação da forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$, na qual $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as variáveis da equação; $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são os coeficientes das variáveis, e b o termo independente.

Definição 2.5.1. *Ao conjunto formado por várias equações lineares, chamamos de sistema de equações lineares.*

A representação de um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & a_{32}x_2 & a_{33}x_3 & \dots & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & a_{m3}x_3 & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Uma solução desse sistema é uma n -upla de números $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Observação 2.5.1. *O sistema representado acima, pode ser escrito na forma matricial:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou seja, $AX = B$, sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ a

matriz das incógnitas e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ a matriz dos termos independentes.

2.6 Forma Quadrática

Definição 2.6.1. *Uma forma quadrática em n variáveis é um polinômio homogêneo de grau dois em suas variáveis, ou seja, é uma função polinomial $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2. \quad (2.5)$$

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e A uma matriz simétrica n por n . A forma matricial associada à equação (2.5) é representada por:

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

sendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Para ilustrar vamos considerar o seguinte polinômio:

$$F(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 5y^2 + 2xz - 2yz + 3z^2.$$

Notamos que ele pode ser escrito da seguinte forma:

$$F(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 2yz + 3z^2.$$

Cuja forma matricial associada é dada por:

$$F(x, y, z) = x^T A x = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Observação 2.6.1. Dada a desigualdade $x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$, caso a matriz A satisfaça a desigualdade anterior, ela será dita definida positiva.

2.6.1 Classificação da Forma Quadrática

A classificação de uma forma quadrática pode ser feita por meio do sinal dos seus autovalores. Assim, uma forma quadrática pode ser: definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa ou indefinida.

Seja, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma forma quadrática como em (2.5). Seus autovalores podem ser encontrados resolvendo o determinante:

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

sendo A a matriz de ordem n associada a forma quadrática e I_n a matriz identidade de ordem n , ou seja, devemos resolver o determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda_n \end{vmatrix} = 0;$$

cujas soluções são os autovalores λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Propriedade 2.6.1. *Seja F uma forma quadrática e $\lambda_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, seus autovalores.*

- I) F é definida positiva se, e somente se, $\lambda_i > 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$;
- II) F é semidefinida positiva se, e somente se, $\lambda_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$;
- III) F é definida negativa se, e somente se, $\lambda_i < 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$;
- IV) F é semidefinida negativa se, e somente se, $\lambda_i \leq 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$;
- V) F é indefinida se, e somente se, $\lambda_i < 0$ e $\lambda_j > 0$, para algum $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Para ilustrar a Proposição 2.6.1 vamos apresentar alguns exemplos.

Exemplo 2.6.1. *Para classificar a forma quadrática $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $F_1(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$.*

Nota-se que F_1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$F_1(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^T A x.$$

Agora, basta encontrar seus autovalores, ou seja, deve-se resolver a equação

$$|A - \lambda I_2| = 0 \iff \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3.$$

Definindo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ observa-se que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ e portanto, F_1 é definida positiva.

Exemplo 2.6.2. *Para classificar a forma quadrática $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $F_2(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$.*

Nota-se que F_2 pode ser escrita da seguinte forma:

$$F_2(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^T A x.$$

Agora, basta encontrar seus autovalores, ou seja, deve-se resolver a equação

$$|A - \lambda I_2| = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 5.$$

Definindo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$ constata-se que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$ logo, F_2 é semidefinida positiva.

Exemplo 2.6.3. *Para classificar a forma quadrática $F_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $F_3(x, y) = -4x^2 + 6xy - 4y^2$.*

Nota-se que F_3 pode ser escrita da seguinte forma:

$$F_3(x, y) = -4x^2 + 6xy - 4y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^T A x.$$

Agora, basta encontrar seus autovalores, ou seja, devemos resolver a equação

$$|A - \lambda I_2| = 0 \iff \begin{bmatrix} -4 - \lambda & 3 \\ 3 & -4 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -7 \text{ ou } \lambda = -1.$$

Definindo $\lambda_1 = -7$ e $\lambda_2 = -1$ observa-se que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ logo, F_3 é definida negativa.

Exemplo 2.6.4. Para classificar a forma quadrática $F_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, $F_4(x, y) = -1x^2 + 2xy - 1y^2$.

Nota-se que F_4 pode ser escrita da seguinte forma:

$$F_4(x, y) = -1x^2 + 2xy - 1y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^T A x.$$

Agora, basta encontrar seus autovalores, ou seja, deve-se resolver a equação

$$|A - \lambda I_2| = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 0.$$

Definindo $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 0$, constata-se que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = 0$ e portanto, F_4 é semidefinida negativa.

Exemplo 2.6.5. Para classificar a forma quadrática $F_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, $F_5(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$.

Nota-se que F_5 pode ser escrita da seguinte forma:

$$F_5(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^T A x.$$

Agora, basta encontrar seus autovalores, ou seja, deve-se resolver a equação

$$|A - \lambda I_2| = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3.$$

Definindo $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ observa-se que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, logo F_2 é indefinida.

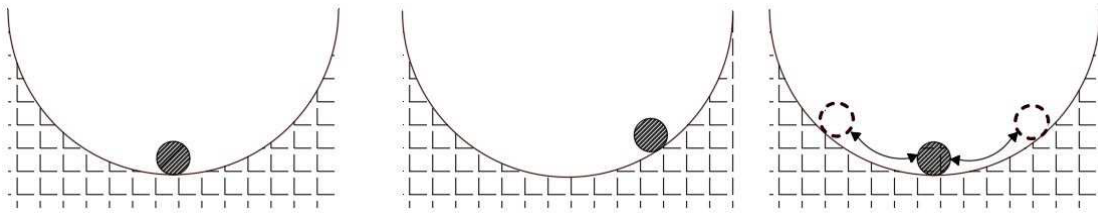
3 ESTABILIDADE

De forma geral, podemos dizer que a estabilidade é o alvo principal a ser determinado dentro de um sistema controle. Além disso, é uma característica importante para o sistema de controle, sem ela qualquer outra característica, como a de um bom desempenho não faz sentido.

Este capítulo abordará as condições de Estabilidade em Sistemas Lineares e a condição suficiente para a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo proposta em termos de LMIs.

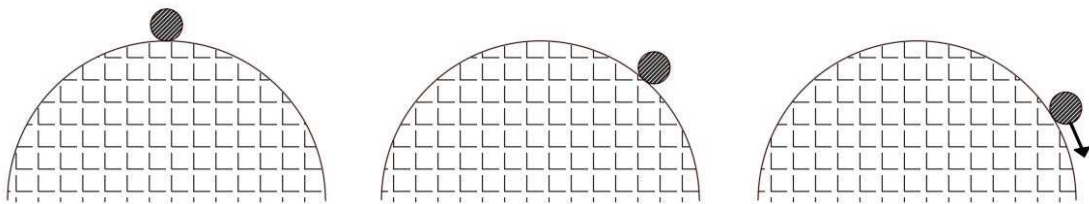
Em termos mecânicos, pode-se dizer que um objeto está em equilíbrio estável se, quando empurrado, ele retorna ao seu ponto inicial depois de suspender o impulso, como ilustrado na Figura 1. Note que na Figura 2 contém um sistema não estável, pois o objeto ilustrado não retorna ao seu ponto inicial, caracterizando um sistema instável.

Figura 1 – Estável mecanicamente no sentido de Lyapunov.



Fonte: (ALVES, 2017).

Figura 2 – Instável mecanicamente no sentido de Lyapunov.



Fonte: (ALVES, 2017).

3.1 Estabilidade Quadrática

Considere o sistema:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.1)$$

sendo x um vetor de estado de n dimensões e $f(x, t)$ um vetor também de n dimensões, cujos elementos são funções de $x_1, x_2, \dots, x_n$, e t . Levando em consideração que o sistema definido em (3.1) tem uma única solução para uma dada condição inicial.

O Estado de equilíbrio do sistema (3.1) é um ponto x_e tal que

$$\dot{x} = 0, \quad \text{isto é,} \quad f(x_e, t) = 0. \quad (3.2)$$

Note que, no caso do sistema linear (3.1), $x_e = 0$.

Caso o sistema seja linear, e invariante no tempo e $f(x, t) = Ax$, podemos dizer que existe apenas um estado de equilíbrio, e um número infinito de estados de equilíbrio se A for não inversível. No caso de sistemas não lineares, pode existir um ou mais estados de equilíbrio, sendo estes estados correspondentes às soluções constantes do sistema $x = x_e$, qualquer que seja t .

Sendo assim vamos redefinir a equação (3.1) substituindo $f(x, t)$ por Ax ,

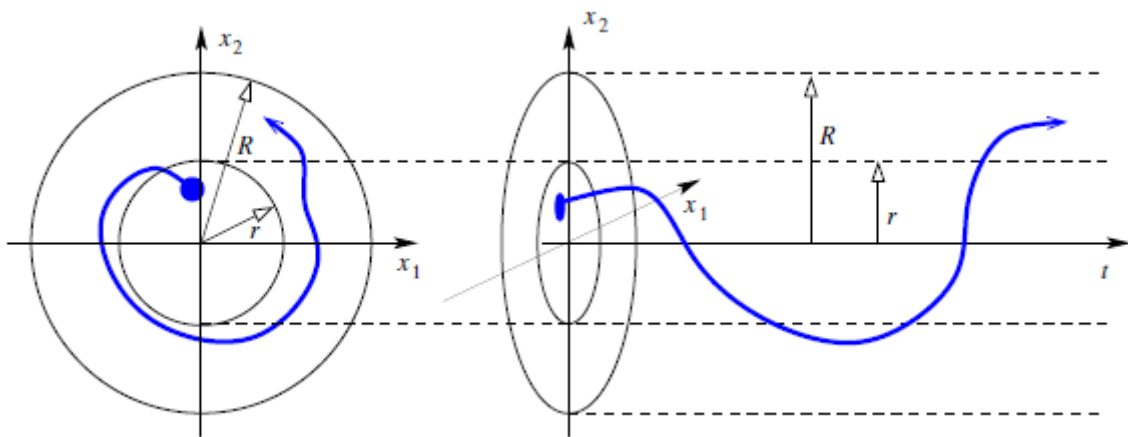
$$\dot{x} = Ax. \quad (3.3)$$

Observação 3.1.1. Para determinar o estado de equilíbrio do sistema, não é necessário solucionar as equações diferenciais do sistema (3.1), sendo suficiente encontrar a solução da equação (3.2).

Definição 3.1.1. Dizemos que um ponto de equilíbrio x_e , do sistema (3.1), é **estável** no sentido de Lyapunov se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para toda condição inicial $x_0 = x(0)$

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Figura 3 – Estável.



Fonte: (TÔRRES, 2015).

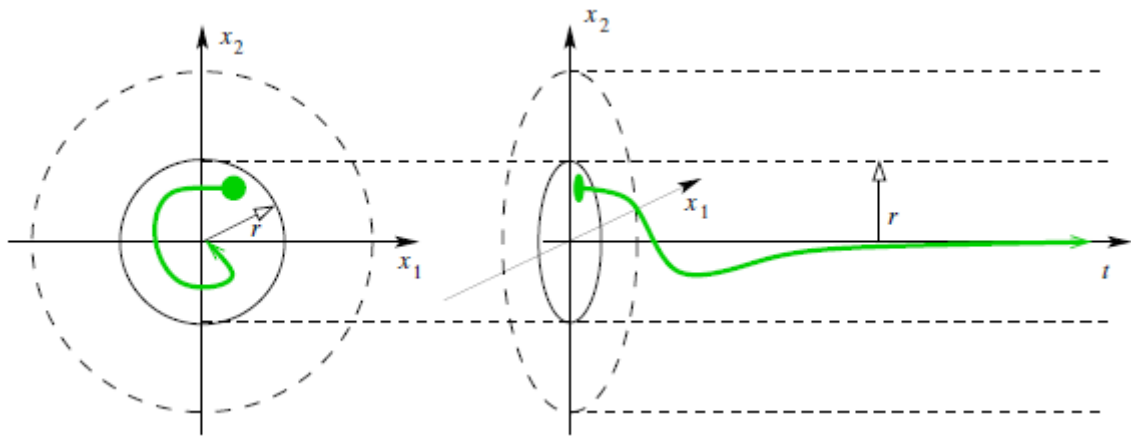
Tomando-se um ponto inicial próximo o suficiente de um ponto de equilíbrio estável, os estados do sistema permanecem próximos ao ponto de equilíbrio o quanto se queira, como ilustra a Figura 3.

Definição 3.1.2. Dizemos que um ponto de equilíbrio x_e , do sistema (3.1), é **assintoticamente estável**, no sentido de Lyapunov, se ele for estável e existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e. \quad (3.5)$$

A Figura 4 ilustra o comportamento da solução de um sistema, cujo o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

Figura 4 – Assintoticamente Estável.



Fonte: (TÔRRES, 2015).

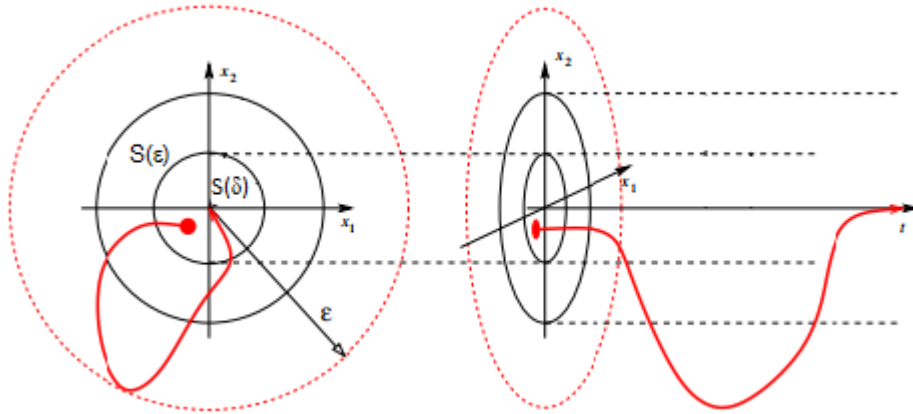
Como pode ser visto Figura 4, tomando-se um ponto inicial próximo o suficiente de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, os estados do sistema ficarão próximos a ele, e convergirão para ele à medida que o tempo passa.

Definição 3.1.3. Dizemos que um ponto de equilíbrio x_e , do sistema (3.1), é **globalmente assintoticamente estável**, no sentido de Lyapunov, se ele for estável e, além disso, para todo $x_0 \in R^n$ temos $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$.

Sendo assim, uma condição necessária para a estabilidade assintótica global é que haja apenas um ponto de equilíbrio em todo o espaço de estados. Em problemas de engenharia de controle, uma característica desejável é a estabilidade assintótica global.

Definição 3.1.4. Um estado de equilíbrio x_e é dito **instável** se para algum número real $\epsilon > 0$ e qualquer número real $\delta > 0$, tão pequenos quanto se queira, sempre há um estado x_0 , em uma vizinhança de raio δ de x_e ($S(\delta)$), tal que a trajetória partindo desse estado abandona a vizinhança de raio ϵ de x_e ($S(\epsilon)$).

Figura 5 – Sistema Instável.



Fonte: (TÔRRES, 2015).

Percebe-se, na Figura 5, que tendo iniciado próximo ao ponto de equilíbrio, a trajetória sai de $S(\epsilon)$ e isto implica que o sistema é instável.

Definição 3.1.5 (Função de Lyapunov). *Seja $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Dizemos que V é uma função de Lyapunov se:*

- i) $V(0) = 0$;
- ii) $V(x) > 0, \forall x \in D, x \neq 0$;
- iii) $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D, x \neq 0$.

Teorema 3.1.1 (Lyapunov). *Dizemos que o ponto de equilíbrio $x_e = 0$ do sistema (3.1) é globalmente assintoticamente estável, se existe uma função $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 (função de Lyapunov) tal que:*

- i) $V(0) = 0$;
- ii) $V(x) > 0, \forall x \in D, x \neq 0$;
- iii) $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D, x \neq 0$.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada, em (HADDAD; CHELABOINA, 2008, p.138). □

Exemplo 3.1.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1; \\ \dot{x}_2 = -x_2; \end{cases}$$

e a função $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, sendo $x = [x_1 \ x_2]^T$. Vamos mostrar que V é uma função de Lyapunov e que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

- i) Para $x_1 = 0, x_2 = 0$, temos $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $V(0, 0) = 0^2 + 0^2$, e portanto $V(0, 0) = 0$;
- ii) Para $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, temos que quaisquer que sejam os valores de x_1 e x_2 diferentes de zero, teremos $V(x_1, x_2) > 0$;
- iii) Para

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\
 &= 2x_1(-x_1) + 2x_2(-x_2) \\
 &= -2x_1^2 - 2x_2^2 \\
 &= -2(x_1^2 + x_2^2)
 \end{aligned}$$

e portanto, $\dot{V}(x_1, x_2) < 0, \forall x \neq 0$, pois $(x_1^2 + x_2^2) > 0$.

Como as condições i), ii) e iii) foram satisfeitas, V é uma função de Lyapunov.

Uma forma simples de encontrar a função de Lyapunov é considerar a forma quadrática

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad (3.6)$$

sendo P uma matriz simétrica definida positiva, ou seja,

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

3.2 Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs

Nesta seção, apresentaremos o conceito de LMIs e outros conceitos básicos relacionados.

3.2.1 Convexidade

Definição 3.2.1. Um conjunto $\mathcal{X}$ é convexo se $\forall x, y \in \mathcal{X}$ e todo θ com $0 \leq \theta < 1$ tem-se que:

$$\theta x + (1 - \theta)y \in \mathcal{X}.$$

Ou seja, quando x e $y \in \mathcal{X} \Rightarrow [x \ y] = [\theta x + (1 - \theta)y; \ 0 \leq \theta < 1] \subset \mathcal{X}$. Sendo $[x \ y]$ o segmento de reta de extremidades x, y . Logo o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de $\mathcal{X}$ pertence $\mathcal{X}$.

Definição 3.2.2. Uma *Desigualdade Matricial Linear - LMI* é uma expressão da forma:

$$F(x) \equiv F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i \succ 0 \quad (3.7)$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o vetor de variáveis de decisão a serem determinadas para a resolução da desigualdade; $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i = 0, \dots, n$ são matrizes constantes simétricas. Quando existe solução para $F(x) \succ 0$, diz-se que a LMI é factível.

Observa-se que $F(x) \succ 0$ significa que $F(x)$ deve ser definida positiva para todo x , ou seja, $y^T F(x) y > 0$ para todo vetor $y \neq 0$. A LMI (3.7) é equivalente a um conjunto de n desigualdades polinomiais em x , obtidas impondo-se que os menores líderes principais de $F(x)$ devem ser todos positivos. A LMI (3.7) é uma restrição convexa, isto é, o conjunto

$$\{x : F(x) \succ 0\}$$

é um conjunto convexo.

A desigualdade (3.7) pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em x , tais como desigualdades lineares, desigualdades quadráticas, desigualdades de norma matricial e restrições utilizadas em teoria de controle, como desigualdade de Lyapunov e outras desigualdades matriciais.

Um exemplo de LMI com variável matricial é a desigualdade de Lyapunov. Para se determinar a estabilidade de um sistema via equação de Lyapunov usamos a relação:

$$A^T P + P A + Q \succ 0 \quad (3.8)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz dada, e que $P = P^T$ é a variável. Em que Q seja uma matriz positiva qualquer e que qualquer matriz $P = P^T \succ 0$ se faz necessária para que a equação de Lyapunov seja semidefinida positiva, ou seja, $A^T P + P A + Q = 0$.

Nem todo resultado da teoria de controle aparece diretamente na forma de LMI, como a equação de Lyapunov. Mas algumas ferramentas da álgebra matricial ajudam a transpor estes resultados para uma formulação de desigualdades matriciais lineares.

Exemplo 3.2.1. Seja $F(x)$ uma LMI,

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -x_1 & 2 \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{com} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T. \quad (3.9)$$

Da Definição 3.2.2, $F(x)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^2 x_i F_i = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 \succ 0$$

ou seja,

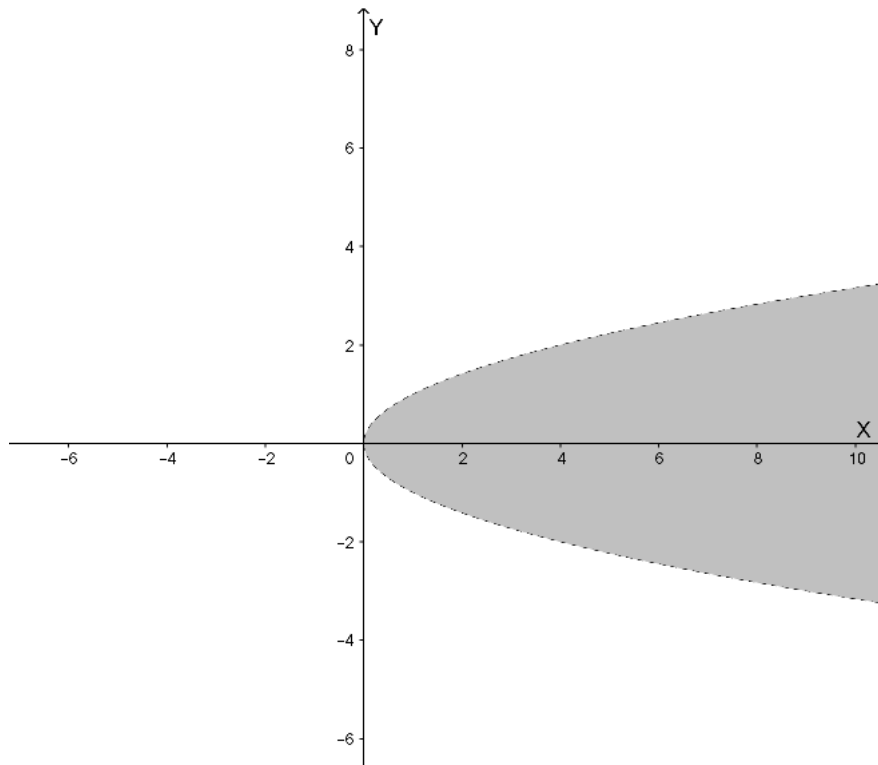
$$\begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -x_1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0.$$

Dizer que $F(x) \succ 0$, como visto na Definição 3.2.2 é equivalente a escrever,

$$\begin{aligned} x_2 &> 0 \\ 2x_2 - x_1^2 &> 0 \end{aligned}$$

quando existe solução, diz-se que a LMI é factível e a região de factibilidade é um conjunto convexo, como pode ser visto na Figura 6. Um conjunto que representa as duas desigualdades polinomiais em x_1 , x_2 , impondo-se que os menores líderes principais de $F(x)$ (x_2 e $2x_2 - x_1^2$) sejam positivos.

Figura 6 – Região de factibilidade da LMI (3.9), considerando $x = x_2$ e $y = x_1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 Estabilidade de sistemas lineares via LMIs

Teorema 3.3.1. *Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x = 0$, do sistema (3.3), seja assintoticamente estável é que exista uma matriz P , simétrica definida positiva ($P \succ 0$), tal que:*

$$A^T P + P A \prec 0. \quad (3.10)$$

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V = x^T P x$, sendo P uma matriz simétrica definida positiva.

Derivando a função encontramos:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}. \quad (3.11)$$

Fazendo a substituição da equação (3.3) em (3.11) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + P A) x. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo, para que a equação (3.12) seja menor que zero, ou seja, $\dot{V}(x) < 0$, para qualquer x diferente de zero, deve-se impor que a LMI $A^T P + P A \prec 0$ e o estado de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável. $\square$

3.4 Estabilidade de sistemas lineares realimentados

Considere um sistema linear realimentado, invariante no tempo, descrito na forma de espaço estado,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.13)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Considerando a disponibilidade para realimentação das variáveis de estado, a lei de controle mais utilizada na literatura é dada por (BOYD *et al.*, 1994):

$$u(t) = -Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (3.14)$$

Ao fazer a substituição de (3.14) em (3.13), temos o sistema realimentado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t). \quad (3.15)$$

Teorema 3.4.1. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear dado em (3.13) é globalmente assintoticamente estável, se existem uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que,*

$$XA^T + AX - BM - M^T B^T \prec 0, \quad (3.16)$$

caso a LMI (3.16) seja factível, o ganho do controlador é dado por $K = MX^{-1}$.

Demonstração. Para o sistema (3.13), uma das funções candidatas a função de Lyapunov é a função quadrática,

$$V(x) = x^T P x. \quad (3.17)$$

Fazendo a derivada da função (3.17) em relação ao tempo durante toda a trajetória:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}. \quad (3.18)$$

Tomando o sistema como em (3.15) e substituindo em (3.18) temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (Ax - BKx)^T P x + x^T P (Ax - BKx) \\ &= ((Ax)^T - (BKx)^T) P x + x^T P (Ax - BKx) \\ &= (x^T A^T - x^T K^T B^T) P x + x^T P (Ax - BKx) \\ &= x^T A^T P x - x^T K^T B^T P x + x^T P A x - x^T P B K x \end{aligned}$$

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A - K^T B^T P - P B K) x. \quad (3.19)$$

Então da equação (3.19), para que $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \neq 0$:

$$A^T P + P A - K^T B^T P - P B K \prec 0. \quad (3.20)$$

Multiplicando por P^{-1} pela direita e pela esquerda,

$$P^{-1} A^T P P^{-1} + P^{-1} P A P^{-1} - P^{-1} P B K P^{-1} - P^{-1} K^T B^T P P^{-1} \prec 0$$

$$P^{-1} A^T + A P^{-1} - B K P^{-1} - P^{-1} K^T B^T \prec 0. \quad (3.21)$$

Fazendo $X = P^{-1}$, a equação (3.21) pode ser escrita da seguinte forma:

$$X A^T + A X - B K X - X K^T B^T \prec 0. \quad (3.22)$$

Fazendo $K X = M$ em (3.22), segue que

$$X A^T + A X - B M - M^T B^T \prec 0.$$

Assim, a demonstração está concluída.

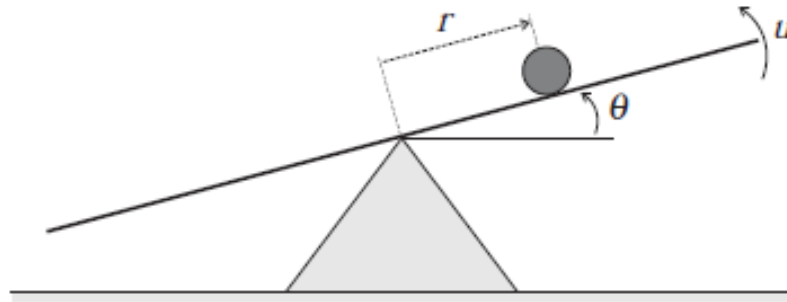
Portanto, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear dado em (3.13) é globalmente assintoticamente estável, e o ganho do controlador é dado por $K = M X^{-1}$. $\square$

O Teorema 3.4.1 é o principal resultado deste trabalho, visto que, por meio dele é possível projetar uma lei de controle, baseada em LMIs, para estabilizar um sistema linear realimentado e invariante no tempo, dado na forma de espaço de estado.

4 APLICAÇÃO: SISTEMA BOLA VIGA

O sistema Bola e Viga é um sistema não-linear e instável em malha aberta. Este é um importante modelo no aprendizado de engenharia e sistemas de controle, pois é de fácil implementação e, conseqüentemente, permite que inúmeras técnicas de controle possam ser estudadas e pesquisadas. Este consiste de uma viga apoiada pelo seu centro com ângulo de inclinação que pode variar e uma bola que desliza sobre esta. O objetivo deste é manter a bola no centro da viga, origem do sistema, quando esta receber alguma perturbação, com isso o controle deve atuar no ângulo da viga para poder movimentar a bola e controlá-la, fazendo com que a mesma volte para a origem.

Figura 7 – Sistema BolaViga.



Fonte: (CARDIM *et al.*, 2009).

O sistema mostrado na Figura 7 representa um sistema bola e viga. A viga é acoplada na saída do eixo de um motor elétrico DC (do inglês *direct current*) e então ela pode ser girada em torno de seu eixo central (ângulo θ) pela ação de um sinal de controle elétrico (entrada u), que é amplificado e aplicado ao motor *DC*, gerando por fim um deslocamento r da bola, sendo que para o nosso sistemas de equações $r = x$.

As equações diferenciais linearizadas que descrevem a dinâmica do sistema Bola-viga (QUANSER, 2008) são dadas a seguir:

$$\begin{cases} \tau \ddot{\theta} + \dot{\theta}(t) = k v_m(t) \\ \ddot{x}(t) = k_{bb} \theta(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo:

$x(t)$ a posição da bola;

$\theta(t)$ o ângulo de carga;

$v_m(t) = u(t)$ o sinal do controle;

τ, k são parâmetros do fabricante;

e $k_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}$.

A descrição e os valores das constantes são dados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema Bola Viga.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa da bola (kg)	m_b	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	r_{arm}	2,54
Raio da bola em cm	r_b	1,96
Comprimento da viga (cm)	L_{plate}	27,5
Parâmetro do fabricante rad/sV	k	1,76
Parâmetro do fabricante s	τ	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida kgm^2	J_b	0,046
Parâmetro do sistema (m/s^2rad)	k_{bb}	1,3

Reescrevendo (4.1) temos:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = k_{bb}\theta(t) \\ \ddot{\theta}(t) = (-1/\tau)\dot{\theta} + (k/\tau)v_m(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = k_{bb}\theta \\ \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = -\frac{1}{\tau}\dot{\theta} + \frac{k}{\tau}v_m. \end{cases}$$

Assim, o sistema (4.1) pode ser escrito no espaço de estado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k/\tau \end{bmatrix} v_m(t). \quad (4.2)$$

Vamos reescrever o sistema (4.2) trocando as variáveis de estado. Para isso será definido:

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) \\ \theta(t) = x_3(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ x_3(t) = \dot{\theta}(t) = \dot{x}_3(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{x}(t) \\ \dot{x}_4(t) = \ddot{x}_3(t) = \ddot{\theta}(t). \end{cases}$$

Sendo assim o sistema (4.2) vai ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k/\tau \end{bmatrix} v_m(t). \quad (4.3)$$

Portanto, o sistema (4.3) está na forma do sistema (3.13) considerando $V_m(t) = u(t)$. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,0877 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 61,7544 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

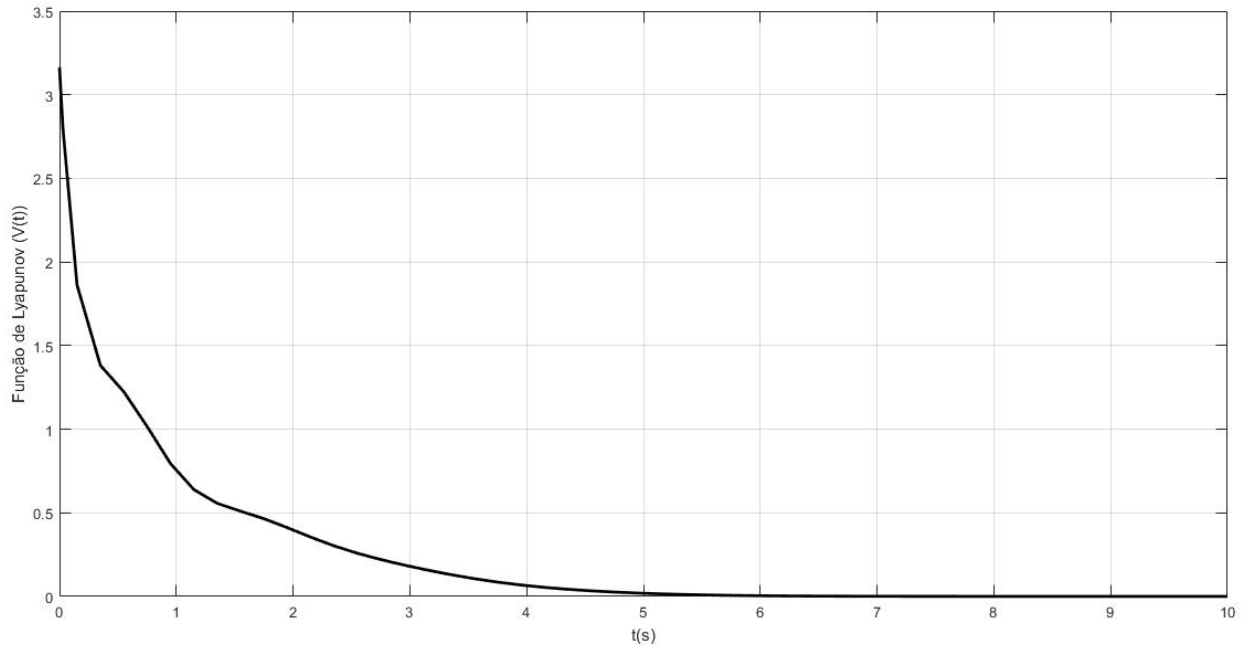
4.1 Simulações

O objetivo da simulação do sistema de controle é conservar a bola na origem. Neste trabalho considerou-se a condição inicial da bola, $x_0 = \begin{bmatrix} 0,5000 & 0,3000 & 0,20000 & 0 \end{bmatrix}^T$ e o ponto de equilíbrio definido por $x_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. De posse das matrizes A e B dadas em (4.4) foi aplicado o Teorema 3.4.1 ao sistema (4.3), utilizando o *software* matemático *Matlab*, com o YALMIP (LOFBERG, 2004) para solucionar as LMIs, como pode ser visto no Apêndice A. Assim, foram obtidos a matriz P simétrica definida positiva e o ganho do controlador K , mostrando que as LMIs, são factíveis. Assim,

$$K = \begin{bmatrix} 0,0427 & 0,1034 & 0,1611 & -0,5110 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1,6118 & 2,1934 & 2,5850 & 0,7629 \\ 2,1934 & 6,0555 & 5,9041 & 2,2958 \\ 2,5850 & 5,9041 & 8,3044 & 2,7049 \\ 0,7629 & 2,2958 & 2,7049 & 1,6878 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Encontrados o ganho K e a matriz simétrica definida positiva P , a representação gráfica da função de Lyapunov, $V = x^T P x$, está ilustrada na Figura 8.

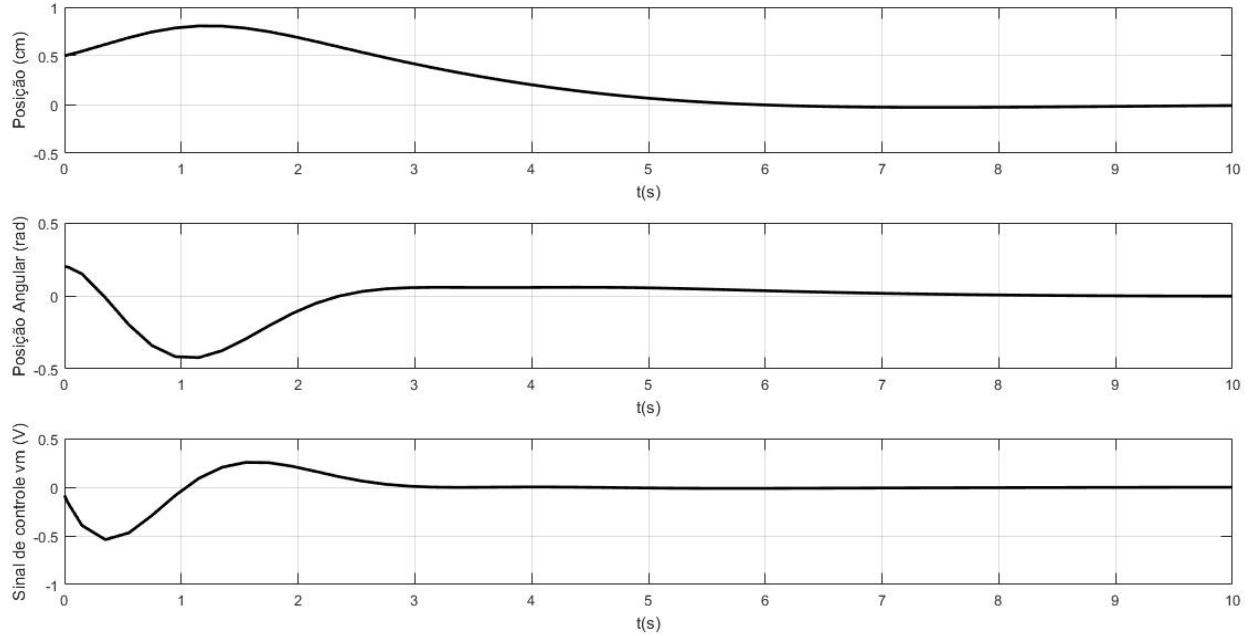
Figura 8 – Gráfico função Lyapunov.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A simulação do sistema controlado (4.3), (3.14) (considerando $u(t) = v_m(t)$), e (4.5), apresentou as respostas ilustradas na Figura 9, onde são apresentadas uma sequência de três gráficos, o primeiro descreve a posição da bola $x_1(t)$ a partir do seu estado inicial e descreve sua trajetória, à medida que o tempo vai se passando, e percebemos que seu

Figura 9 – Posição $x(t)$, ângulo $\theta(t)$ e sinal do sistema controlado, considerando a condição inicial $x_0 = [0.5 \ 0.3 \ 0.2 \ 0]$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

estado final é a origem. O segundo mostra a posição angular $x_3(t)$, e partindo de uma inclinação inicial ($\theta = 0,2000$), vai descrevendo o comportamento angular com o decorrer do tempo até se chegar no ponto de equilíbrio que é a origem. O terceiro é a descrição do comportamento do sinal de controle v_m que é a tensão aplicada ao sistema em forma de realimentação para mover a barra descrita na Figura 7, que com o decorrer do tempo esse sinal de controle é nulo, o que significa que a bola atingiu a origem.

O controlador definido para esta simulação mostrou sua eficiência levando a bola para a origem em aproximadamente 6,0 segundos, e exigiu pouco esforço de tensão.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudados os fundamentos matemático da teoria de controle de sistemas lineares invariantes no tempo, com análise e projeto de controladores baseados em desigualdades matriciais lineares LMIs.

Foram estudados alguns conceitos que fizeram a fundamentação teórica da proposta apresentada neste trabalho, inicialmente no capítulo 2 foram estudados alguns tópicos da álgebra linear, como por exemplo, as matrizes, autovalores, matriz simétrica definida positiva e a forma quadrática.

Em seguida no Capítulo 3 foram conceituadas, a estabilidade, a desigualdade matricial linear, a estabilidade quadrática, a estabilidade de sistemas lineares via LMIs, a estabilidade de sistemas lineares realimentados. Após ter sido feita a fundamentação matemática, foi estabelecida as condições de estabilidade de sistemas lineares realimentados, com projeto baseado em LMIs.

Por fim no capítulo 4, foi apresentada uma aplicação, em um sistema bola viga, que é um sistema muito utilizado para testar projetos de controle. As simulações numéricas foram realizadas utilizando o *software* matemático *Matlab*, com o YALMIP (LOFBERG, 2004). Como pode ser visto na Figura 9, o controlador utilizou pouco esforço de tensão e, ainda assim, o sistema controlado apresentou resposta transitória apropriada, comprovando portanto, a eficácia da metodologia apresentada neste trabalho. Além disso, vale destacar que com a utilização de *software* matemáticos no projeto de controladores baseados e LMIs como, por exemplo, o Matlab é relativamente simples, como pode ser visto no Apêndice A.

Através da aplicação do sistema bola viga, pode-se verificar através das simulações em *software* matemático, a aplicabilidade deste método no controle de sistemas lineares invariantes no tempo. Como o projeto é baseado em LMIs, a solução do problema é relativamente simples de se obter através do uso do computador.

Uma perspectiva futura para o estudo desempenhado neste trabalho, é uma visão como futuro professor, fazer a utilização deste trabalho como exemplo de aplicação, para estimular alunos quanto a importância do estudo das matrizes, transformações lineares e outros conceitos estudados. Além disso, pode-se pensar em inserir índices de desempenho, como por exemplo, taxa de decaimento para melhorar o tempo de resposta.

Referências

- ALVES, R. P. **Fundamentos Matemáticos da Teoria de Controle de Sistemas Lineares com Incertezas Politépicas Baseados em LMIs**. 2017. 56 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Tocantins, Palmas, 2017. Citado na página 29.
- BARMISH, B. Stabilization of uncertain systems via linear control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 28, n. 8, p. 848–850, aug. 1983. Citado na página 14.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989. Citado na página 14.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. v. 15. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15). Citado 2 vezes nas páginas 14 e 36.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; AO, E. A.; COVACIC, M. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009. Citado na página 38.
- DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. **IEEE Trans. on Automatic Control**, v. 34, n. 8, p. 831–847, Aug 1989. Citado na página 14.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **LMI Control Toolbox: for use with Matlab**. Natick: The Math Works, Inc., 1995. Citado na página 14.
- GONSIOROSKI, L. **Introdução aos Sistemas de Controle**. 2012. Acesso em: 12 out. 2017. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=0jM-XSOfoA4>>. Citado na página 13.
- HADDAD, W. M.; CHELLABOINA, V. **Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach**. New York: Princeton University Press, 2008. Citado na página 32.
- KHALIL, H. K. Nonlinear systems. **Prentice-Hall, New Jersey**, v. 2, n. 5, p. 5–1, 1996. Citado na página 14.
- LOFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004, Taipei. **Proceedings...** Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.
- NISE, N. S.; SILVA, F. R. da. **Engenharia de sistemas de controle**. e. Pomona, Califórnia: LTC, 2002. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

QUANSER. **2D Ball Balancer Control using QUARC**: Instructor manual. Ontário, Canadá, 2008. 87 p. Citado na página 38.

SOUZA, W. A. de. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno**. 2013. 92 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013. Citado na página 13.

TÔRRES, L. A. B. **Teoria de Estabilidade de Lyapunov**. 2015. Acesso em: 18 out. 2017. Disponível em: <http://www.cpdee.ufmg.br/~torres/Estabilidade_Lyapunov.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 32.

A APÊNDICE A

Neste apêndice será apresentado o algoritmo que foi utilizado no *software* MATLAB, para verificar a estabilidade do sistema linear realimentado via LMIs.

```
clear all
clc
clear all
clc
tau=0.0285
k=1.76
kbb=1.3
A=[0 1 0 0; 0 0 kbb 0; 0 0 0 1; 0 0 0 -1/tau]
B=[0; 0; 0; k/tau]

n=length(A);
X = sdpvar(n,n,'symmetric'); % Criando a matriz variável X_nxn simétrica
M = sdpvar(1,n);

% %XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
% %XXXXXXXXXXXXX      LMIs estabilidade      XXXXXXXXXXXXXXXX
% %XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

LMI = set(X>0)+ ...
      set(A*X+X*A'-B*M-M'*B'< 0);

%Resolução das Lmis e opções de solvers
opts=sdpsettings;
opts.solver='lmilab';
%opts.solver='sedumi';
opts.verbose=0; % 0 não aparece o lixo e 1 aparece o lixo
result=solvesdp(LMI,[],opts);

disp('XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX CONTROLADOR XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX')
%Checando a factibilidade:
[p,d]=checkset(LMI);
      if sum(p<0) == 0
```

```

disp('*****0 sistema é factível:*****')
        P=inv(double(X))
        M=(double(M));
        K=M*P

    else
        disp('0 sistema não é factível!')
    end

%Condição inicial
x0=[0.5; 0.3; 0.2; 0]

sim('bola_viga_teste')

figure(1);
subplot(3,1,1);
plot(tempo,X,'k','LineWidth',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('Posição (m)')
grid on
subplot(3,1,2);
plot(tempo,teta,'k','LineWidth',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('Posição Angular (rad)')
grid on
subplot(3,1,3);
plot(tempo,u,'k','LineWidth',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('Sinal de controle vm (v)')
grid on

%CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO DE LYAPUNOV.

figure(2);
plot(tempo,V,'k','LineWidth',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('Função de Lyapunov (V(t))')
grid on

```