

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
CURSO SUPERIOR ENGENHARIA ELÉTRICA**

THÁLISSON CÂMARA BELÉM

**PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA O ENSINO DE TEORIA
ELÉTROMAGNÉTICA DO CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DO IFTO.**

**PALMAS
2026**

THÁLISSON CÂMARA BELÉM

**PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA O ENSINO DE TEORIA
ELÉTROMAGNÉTICA DO CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DO IFTO.**

Projeto apresentado à Coordenação do Curso Superior de engenharia elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins.

Orientador: Me. Mateus Lima Peduzzi

**PALMAS
2026**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

B428p Belém, Thálisson Câmara
PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA O ENSINO DE
TEORIA ELÉTROMAGNÉTICA DO CURSO DE ENGENHARIA
ELÉTRICA DO IFTO. / Thálisson Câmara Belém. – Palmas, TO, 2026.
143 p. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus
Palmas, Palmas, TO, 2026.

Orientador: Me. Mateus Lima Peduzzi

1. Teoria Eletromagnética. 2. Eletromagnetismo. I. Lima Peduzzi,
Mateus. II. Título.

CDD 621

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e
pesquisa, desde que citada a fonte.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a)
autor(a).**

THÁLISSON CÂMARA BELÉM

**PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA O ENSINO DE TEORIA
ELÉTROMAGNÉTICA DO CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DO IFTO.**

Projeto apresentado à Coordenação do Curso Superior de engenharia elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins.

Aprovado em: 09/02/2026.

BANCA AVALIADORA

Documento assinado digitalmente



MATEUS LIMA PEDUZZI

Data: 29/07/2026 19:49:59-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Me. Mateus Lima Peduzzi (Orientador)

IFTO - Campus Palmas

Documento assinado digitalmente



MARCIO AUGUSTO TAMASHIRO

Data: 23/07/2026 08:47:47-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Marcio Augusto Tamashiro (Membro da
Banca)

IFTO - Campus Palmas

Me. Edson Luiz Kraemer (Membro da Banca)

IFTO - Campus Palmas

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Janilto Batista Belém (1972–2025), policial militar do Estado do Tocantins por mais de três décadas, exemplo de honra, dedicação e compromisso com o dever. Seu caráter, sua generosidade e o amor incondicional que sempre dedicou à nossa família foram fundamentais na formação dos meus valores e da pessoa que sou hoje.

Mesmo não estando mais fisicamente presente, sua influência permanece viva em cada passo da minha trajetória. Este trabalho é também fruto dos ensinamentos, dos sacrifícios e do apoio que recebi ao longo da vida. Sua força, sua integridade e seu exemplo continuarão sendo fonte de inspiração para todas as minhas realizações.

Com profunda gratidão, respeito e saudade, dedico este trabalho à sua memória.

*“Não podemos escapar da convicção de que a luz
consiste nas ondulações transversais do mesmo meio
que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos.”*

James Clerk Maxwell (1865)

RESUMO

A disciplina de Teoria Eletromagnética é reconhecida como uma das mais desafiadoras nos cursos de Engenharia Elétrica, tanto pelo rigor matemático quanto pela formalização física envolvida. Além de exigir domínio de conceitos físicos abstratos, a disciplina depende fortemente de conhecimentos prévios de geometria analítica e cálculo vetorial, que muitas vezes não estão suficientemente consolidados entre os estudantes. Ao longo da vivência acadêmica e da atuação como monitor da disciplina, observou-se que grande parte das dificuldades enfrentadas pelos alunos está concentrada nessas bases matemáticas, o que compromete a compreensão das leis fundamentais do eletromagnetismo. Soma-se a isso o fato de que muitos materiais didáticos tradicionalmente adotados são extensos e voltados à formação em Física, o que pode tornar o aprendizado menos direto para estudantes de Engenharia Elétrica. Diante desse cenário, este trabalho propõe a elaboração de um material teórico, prático e didático de Teoria Eletromagnética, com foco específico nos estudantes de Engenharia Elétrica. O conteúdo apresenta uma revisão direcionada de cálculo vetorial aplicada ao eletromagnetismo, aliada a estratégias para a resolução de exercícios típicos da disciplina, buscando tornar o processo de aprendizagem mais claro, objetivo e alinhado às reais exigências do curso.

Palavras-chave: Teoria eletromagnética; Engenharia elétrica; Cálculo vetorial; Estratégias de aprendizagem; Ensino de eletromagnetismo.

ABSTRACT

Electromagnetic Theory is widely regarded as one of the most challenging subjects in Electrical Engineering programs, due to both its mathematical rigor and the level of physical abstraction required. In addition to advanced physical concepts, the subject relies heavily on prior knowledge of analytical geometry and vector calculus, which are often not sufficiently consolidated among students. Through academic experience and work as a teaching assistant for the course, it was observed that many of the difficulties faced by students stem from weaknesses in these mathematical foundations, directly affecting their understanding of the fundamental laws of electromagnetism. Furthermore, many traditional textbooks are extensive and primarily oriented toward Physics students, which may hinder a more direct learning process for Electrical Engineering undergraduates. In this context, this work proposes the development of a theoretical, practical, and didactic material on Electromagnetic Theory aimed specifically at Electrical Engineering students. The material emphasizes applied vector calculus and presents problem-solving strategies commonly required in the course, with the goal of providing a clearer, more objective, and more effective learning experience.

Keywords: Electromagnetic theory; Electrical engineering; Vector calculus; Learning strategies; Electromagnetism education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Distribuição dos conceitos obtidos pelos estudantes matriculados na disciplina de Eletromagnetismo do curso de Engenharia Elétrica da UFMG.	17
Figura 2 – Índice de reprovação das disciplinas do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).	18
Figura 3 – Projeção de um vetor sobre outro utilizando o produto escalar	20
Figura 4 – Sistema de coordenadas cilíndricas e seus versores.	23
Figura 5 – sistema de coordenadas esféricas e seus versores.	23
Figura 6 – Superfície cilíndrica considerada	26
Figura 7 – Superfície atravessada por um campo vetorial $\vec{F}$	31
Figura 8 – Superfície cilíndrica do exercício 5	32
Figura 9 – Superfície plana atravessada por um campo vetorial $\vec{F}$	34
Figura 10 – Geometria para a Lei de Coulomb com elemento de carga dq	38
Figura 11 – Campo elétrico de um fio finito: decomposição e cancelamento das componentes horizontais	39
Figura 12 – Superfície gaussiana atravessando a interface entre dois meios.	44
Figura 13 – Caminho fechado atravessando a interface entre dois meios.	45
Figura 14 – Montagem de duas cargas pontuais: a carga q_2 é trazida do infinito até o ponto P, a uma distância r da carga q_1	46
Figura 15 – Representação do processo de montagem de cargas a partir do infinito para uma região inicialmente sem cargas.	46
Figura 16 – Cabo coaxial de comprimento L ao longo do eixo z , com raio interno a e externo b , apresentando densidade superficial de carga ρ_s na superfície interna.	49
Figura 17 – Representação de um capacitor de placas paralelas, separadas por uma distância d , com campo elétrico uniforme.	50
Figura 18 – Capacitor esférico formado por duas superfícies condutoras concêntricas de raios a e b , carregadas com cargas $+Q$ e $-Q$	52
Figura 19 – Distribuição de potencial ao longo de uma dimensão.	53
Figura 20 – Representação do potencial elétrico em função da posição, evidenciando comportamento linear.	53
Figura 21 – Distribuição de potencial ao longo do contorno de uma superfície fechada.	54
Figura 22 – Distribuição de potencial constante ao longo do contorno de uma superfície fechada.	55
Figura 23 – Condutor esférico em equilíbrio eletrostático, com cargas distribuídas na superfície e raio R	56
Figura 24 – Sistemas equivalentes pelo método das imagens	57
Figura 25 – Representação tridimensional do problema apresentado	58

Figura 26 – Geometria para o cálculo do potencial elétrico de um dipolo em um ponto genérico P	60
Figura 27 – Representação geométrica do problema de fronteira: núcleo condutor esférico com carga Q envolvido por uma casca dielétrica de permissividade absoluta ϵ	69
Figura 28 – Corrente elétrica fluindo através de um fio retilíneo.	73
Figura 29 – Corrente elétrica fluindo através de uma superfície.	75
Figura 30 – Corrente elétrica fluindo através de um volume.	78
Figura 31 – Volume de controle imerso em uma distribuição de corrente. As linhas de corrente atravessam a superfície fechada S , permitindo relacionar o fluxo de corrente à variação da carga armazenada no interior do volume.	82
Figura 32 – Geometria utilizada na Lei de Biot–Savart. O elemento de corrente $I d\vec{\ell}$, localizado na posição $\vec{r}'$, produz uma contribuição para o campo magnético no ponto de observação P , localizado na posição $\vec{r}$	84
Figura 33 – Geometria utilizada no cálculo do campo magnético produzido por um fio retilíneo através da Lei de Biot–Savart.	86
Figura 34 – Geometria utilizada para determinar os limites angulares da integração na Lei de Biot–Savart para um fio retilíneo finito.	87
Figura 35 – Linhas de campo magnético produzidas por um fio retilíneo percorrido por corrente.	89
Figura 36 – Forças magnéticas entre dois fios retilíneos paralelos percorridos por correntes no mesmo sentido. O campo magnético produzido por cada fio atua sobre a corrente do outro, resultando em uma força de atração mútua.	90
Figura 37 – Curva fechada arbitrária envolvendo um fio retilíneo percorrido por corrente. A circulação do campo magnético ao longo da curva depende apenas da corrente total atravessando a superfície delimitada por C	96
Figura 38 – Curva amperiana circular utilizada no cálculo do campo magnético produzido por um fio retilíneo infinito.	99
Figura 39 – Plano infinito percorrido por uma densidade superficial de corrente uniforme $\vec{K}$	101
Figura 40 – Amperiana utilizada na aplicação da Lei de Ampère para uma corrente superficial uniforme.	101
Figura 41 – Representação de um solenóide.	103
Figura 42 – Contribuições das duas fileiras de espiras para o campo magnético de um solenoide. As contribuições no interior possuem o mesmo sentido e se reforçam mutuamente, enquanto fora do solenoide tendem a se cancelar.	104
Figura 43 – Superfície gaussiana atravessando a interface entre dois meios.	106
Figura 44 – Caminho fechado atravessando a interface entre dois meios.	107
Figura 45 – Espira retangular percorrida por corrente imersa em um campo magnético uniforme. O vetor normal $\hat{n}$ forma um ângulo θ com o campo magnético aplicado.	108

Figura 46 – Comportamento resultante dos momentos de dipolo magnético dos materiais na presença de campo externo.	119
Figura 47 – Cilindro maciço percorrido por uma corrente uniforme I . As curvas C_1 ($r < R$) e C_2 ($r > R$) representam as amperianas utilizadas para a determinação dos campos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$	124
Figura 48 – Representação esquemática do campo magnético $\mathbf{B}$, do campo auxiliar $\mathbf{H}$ e da magnetização $\mathbf{M}$ no interior de um cilindro diamagnético percorrido por uma corrente uniforme. Observa-se que $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ possuem o mesmo sentido azimuthal, enquanto a magnetização induzida apresenta sentido oposto ao campo aplicado. 127	
Figura 49 – Representação esquemática da magnetização em um cilindro diamagnético percorrido por uma corrente elétrica uniforme I . As espiras representam os dipolos magnéticos equivalentes associados ao material, cujo momento magnético $\mathbf{m}$ aumenta com a distância ao eixo do cilindro em decorrência do crescimento da magnetização. A não uniformidade da magnetização origina uma densidade de corrente ligada de volume $\mathbf{J}_b$, enquanto, na superfície lateral do material, surge a densidade de corrente superficial ligada $\mathbf{K}_b$	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Atividades acadêmicas curriculares consideradas difíceis.	16
Tabela 2 – Transformação entre bases cilíndricas e cartesianas	22
Tabela 3 – Transformação entre bases esféricas e cartesianas	24
Tabela 4 – Transformações de pontos entre sistemas de coordenadas	24
Tabela 5 – Elementos diferenciais de linha, área e volume em diferentes sistemas de coordenadas	25
Tabela 6 – Comparação entre as diferentes descrições de corrente.	80

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFTO	Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Tocantins.
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Problema	15
1.2	Objetivos	15
1.3	Justificativa	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	Geometria Analítica	19
2.1.1	Produto Escalar	19
2.1.2	Produto Vetorial de Dois Vetores	21
2.2	Cálculo Vetorial	22
2.2.1	Sistema de coordenadas	22
2.2.2	Integrais de Linha e Superfície	25
2.2.3	O Operador Gradiente	28
2.2.3.1	Cálculo do Gradiente em outros Sistemas de Coordenadas	30
2.2.3.2	Teorema Fundamental do Gradiente	30
2.2.4	O Operador divergente	30
2.2.4.1	Divergente em outros Sistemas de Coordenadas	31
2.2.4.2	Teorema Fundamental do Divergente (Teorema de Gauss)	31
2.2.4.3	O Problema do Divergente do Campo $1/r^2 \vec{a}_r$	33
2.2.5	O Operador rotacional	34
2.2.5.1	Rotacional em outros Sistemas de Coordenadas	35
2.2.5.2	Propriedades do Rotacional	35
2.2.5.3	Teorema do Rotacional (Teorema de Stokes)	36
2.3	Eletrostática	37
2.3.1	O campo elétrico	37
2.3.1.1	Campo Elétrico de um Fio Finito e Uniforme	39
2.3.2	O divergente do campo elétrico: A Lei de Gauss - Forma Diferencial	40
2.3.3	A Lei de Gauss na Forma Integral	41
2.3.4	O Rotacional do Campo Elétrico	42
2.3.5	O Potencial Elétrico	43
2.3.6	Condições de Contorno para o Campo Elétrico	44
2.3.7	Energia no Campo Eletrostático	45
2.3.8	Cálculo da Capacitância	51
2.3.9	Equações de Poisson e Laplace	52
2.3.10	Método das Imagens	57
2.3.11	Campo Elétrico na Matéria	59

2.3.12	O Dipolo Elétrico	59
2.3.12.1	Determinação do Campo Elétrico de um Dipolo em um Ponto P	60
2.3.13	Polarização e Potencial de uma Distribuição de Dipolos	61
2.3.13.1	Potencial de um Meio Polarizado	61
2.3.13.2	Desenvolvimento e a Identidade Fundamental	62
2.3.13.3	O Surgimento das Cargas Ligadas	62
2.3.13.4	Exemplo Prático: A Cuba Polarizada Uniformemente	63
2.3.13.5	A Grande Ponte Conceitual da Eletrostática	64
2.3.14	Dielétricos Lineares e o Vetor Deslocamento Elétrico	65
2.3.14.1	A Origem Matemática do Vetor Deslocamento	65
2.3.14.2	Formulação Integral e Aplicação Prática	66
2.3.14.3	Dielétricos Lineares e Relações Constitutivas	67
2.3.14.4	Problema de Aplicação: Esfera Condutora com Casca Dielétrica	68
2.4	Introdução à Magnetostática	72
2.4.1	Correntes Lineares, Superficiais e Volumétricas	73
2.4.2	Equação da Continuidade	82
2.4.3	Lei de Biot–Savart	84
2.4.4	Campo Magnético Produzido por um Fio Retilíneo Infinito	85
2.4.5	Entendendo o Campo Magnético como uma Manifestação Relativística do Campo Elétrico	91
2.4.6	Divergente do Campo Magnético	93
2.4.7	O Rotacional do Campo Magnético	95
2.4.8	Formas Integrais e a Lei de Ampère	97
2.4.9	Condições de Contorno da Magnetostática	105
2.4.10	Torque sobre uma Espira Percorrida por Corrente	108
2.4.11	Potencial Vetorial Magnético	110
2.4.12	Campo Magnético na Matéria	114
2.4.13	Correntes de Magnetização	118
2.4.14	O Campo Magnético Auxiliar	120
2.4.15	Exemplo: Cilindro Diamagnético Percorrido por uma Corrente Uniforme	124
2.5	Extensão das Equações de Maxwell para Campos Variáveis no Tempo .	131
2.5.1	Lei de Faraday e Lei de Lenz	131
2.5.2	Indutância	133
2.5.3	Corrente de Deslocamento	135
2.5.4	Equações de Maxwell	136
3	METODOLOGIA	139
3.1	Caracterização da Pesquisa	139
3.2	Desenvolvimento do Material Didático	139
3.3	Aplicação Prática do Material	139

3.4	Observações e Interação com os Estudantes	140
3.5	Perspectivas de Validação da Proposta em Trabalhos Futuros	140
4	CONCLUSÃO	142
	REFERÊNCIAS	143

1 INTRODUÇÃO

1.1 Problema

A Teoria Eletromagnética constitui um dos pilares da formação em Engenharia Elétrica, estando diretamente relacionada a diversas áreas da profissão, como sistemas de potência, telecomunicações, eletrônica e máquinas elétricas. Apesar de sua importância, a disciplina é amplamente conhecida entre os estudantes por seu elevado grau de dificuldade, resultado da combinação entre formalismo matemático rigoroso e conceitos físicos abstratos.

A experiência adquirida ao longo de quatro semestres como monitor da disciplina permitiu observar de forma recorrente que as principais dificuldades dos alunos não estão apenas nos conceitos físicos do eletromagnetismo, mas sobretudo nas bases matemáticas necessárias para compreendê-los. Deficiências em geometria analítica e cálculo vetorial dificultam a interpretação dos campos vetoriais e a aplicação correta das leis fundamentais, tornando o aprendizado fragmentado e pouco intuitivo.

Além disso, muitos dos livros didáticos utilizados como referência na disciplina são extensos e, em grande parte, direcionados à formação em Física, o que nem sempre atende de forma objetiva às necessidades do estudante de Engenharia Elétrica. Nesse contexto, surge a necessidade de um material que apresente o conteúdo de forma mais direta, sem perder o rigor, mas com uma abordagem voltada à aplicação prática e à resolução de exercícios.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver um material de Teoria Eletromagnética voltado aos estudantes de Engenharia Elétrica, que integre de forma clara os fundamentos físicos do eletromagnetismo com as ferramentas matemáticas necessárias à sua compreensão. Busca-se oferecer uma abordagem que priorize o entendimento do cálculo vetorial aplicado, preparando o aluno para interpretar corretamente os fenômenos físicos e resolver os exercícios exigidos ao longo da disciplina de maneira mais segura e eficiente.

1.3 Justificativa

A disciplina de Eletromagnetismo ocupa posição de destaque na formação de físicos e engenheiros, uma vez que fornece os fundamentos teóricos para diversas áreas da ciência e da engenharia, como sistemas elétricos de potência, eletrônica, telecomunicações, óptica e física moderna. Apesar de sua importância, a literatura e indicadores institucionais apontam que seu processo de aprendizagem representa um desafio significativo para muitos estudantes, em

virtude da elevada carga matemática, do elevado nível de abstração e da necessidade de integrar conceitos físicos e ferramentas do cálculo vetorial.

Essa dificuldade é observada em diferentes instituições de ensino superior brasileiras. Dados divulgados pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), apresentados na Tabela 1, mostram que a disciplina de *Eletromagnetismo* está entre as atividades acadêmicas curriculares consideradas mais difíceis pelos estudantes do curso de Engenharia Elétrica, figurando ao lado de disciplinas tradicionalmente reconhecidas por seu elevado grau de complexidade, como Cálculo Diferencial e Integral, Análise de Circuitos Elétricos e Análise Numérica ([Universidade Federal de Minas Gerais, 2021](#)).

Tabela 1: Atividades acadêmicas curriculares consideradas difíceis.

Atividades Difíceis
ELE039 – Acionamentos Elétricos
DCC003 – Algoritmos e Estruturas de Dados I
DCC004 – Algoritmos e Estruturas de Dados II
ELE064 – Análise de Circuitos Elétricos I
ELE065 – Análise de Circuitos Elétricos II
ELE066 – Análise de Circuitos Elétricos III
ELT088 – Análise de Sistemas Dinâmicos Lineares
DCC033 – Análise Numérica
ELE002 – Aterramentos Elétricos
MAT001 – Cálculo Diferencial e Integral I
MAT039 – Cálculo Diferencial e Integral II
MAT002 – Cálculo Diferencial e Integral III
ELE033 – Circuitos Polifásicos e Magnéticos
ELT035 – Controle de Sistemas Lineares
ELT013 – Controle Digital
ELE001 – Eletromagnetismo
MAT016 – Equações Diferenciais B
FIS069 – Fundamentos de Eletromagnetismo
EEE024 – Fundamentos de Energia Alternativa
FIS086 – Fundamentos de Oscilações, Ondas e Ópticas
MAT038 – Geometria Analítica e Álgebra Linear
DCC011 – Introdução a Banco de Dados
DCC024 – Linguagens de Programação
EST045 – Probabilidade e Processos Estocásticos
DCC203 – Programação e Desenvolvimento de Software I
DCC204 – Programação e Desenvolvimento de Software II
DCC605 – Sistemas Operacionais
ELT616 – Sistemas Processadores e Periféricos
ELE050 – Transitórios em Sistemas de Energia Elétrica

Fonte: Adaptado de Universidade Federal de Minas Gerais (2021).

Além da percepção dos estudantes quanto ao grau de dificuldade da disciplina, os indicadores de desempenho acadêmico reforçam esse cenário. A Figura 1 apresenta a distribuição dos conceitos obtidos pelos estudantes matriculados na disciplina de Eletromagnetismo do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Observa-se uma predominância dos conceitos **D** e **F**, evidenciando um elevado percentual de estudantes com baixo rendimento acadêmico na disciplina. Esses resultados corroboram a necessidade de iniciativas que contribuam para facilitar o processo de aprendizagem, tornando o conteúdo mais acessível e favorecendo uma melhor compreensão dos conceitos fundamentais do eletromagnetismo (Universidade Federal de Minas Gerais, 2021).

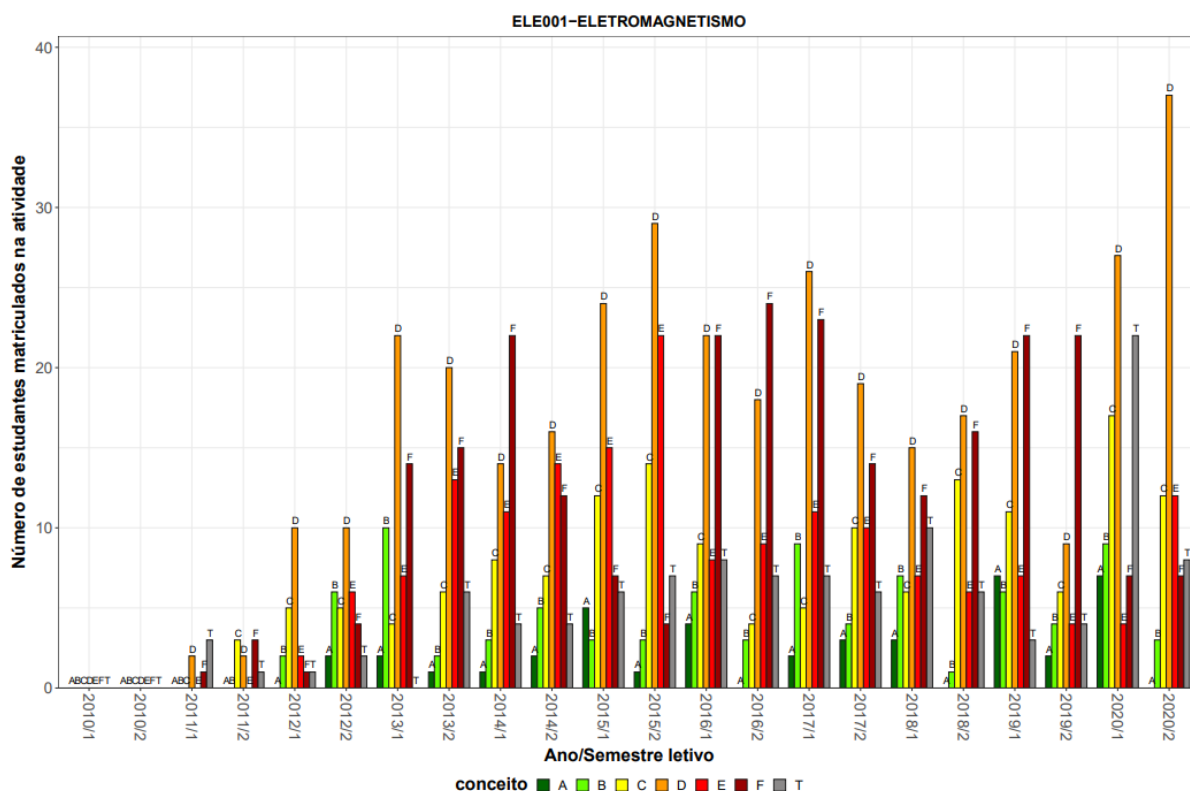


Figura 1: Distribuição dos conceitos obtidos pelos estudantes matriculados na disciplina de Eletromagnetismo do curso de Engenharia Elétrica da UFMG.

Fonte: Adaptado de Universidade Federal de Minas Gerais (2021).

Os resultados observados na UFMG não constituem um caso isolado. Levantamentos realizados pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) também evidenciam que a disciplina de Eletromagnetismo apresenta um dos maiores índices de reprovação entre as disciplinas do curso de Engenharia Elétrica. A Figura 2 apresenta a comparação entre os índices de reprovação das disciplinas do curso, destacando Eletromagnetismo entre aquelas com maior percentual de insucesso acadêmico. Esse cenário reforça que as dificuldades enfrentadas pelos estudantes transcendem contextos institucionais específicos, indicando a necessidade de materiais didáticos que contribuam para uma aprendizagem mais acessível e significativa (Universidade Federal de

Santa Maria, 2022).



Figura 2: Índice de reprovação das disciplinas do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

Fonte: Adaptado de Universidade Federal de Santa Maria (2022).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Geometria Analítica

Antes do desenvolvimento da Teoria Eletromagnética propriamente dita, faz-se necessário recordar alguns conceitos fundamentais de Geometria Analítica que servirão de base para as construções matemáticas apresentadas ao longo desta obra. Neste capítulo serão abordados apenas os resultados estritamente necessários para o desenvolvimento da teoria, sem demonstrações detalhadas. Para um estudo mais aprofundado sobre os tópicos aqui apresentados, recomenda-se a obra de Steinbruch e Winterle ([STEINBRUCH; WINTERLE, 1987](#)), referência clássica em cursos de graduação nas áreas de Ciências Exatas e Engenharia.

2.1.1 Produto Escalar

Nesta seção serão introduzidos os conceitos de produtos entre vetores. Ao longo de toda a obra, considera-se que os vetores pertencem ao espaço vetorial euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, uma vez que a formulação clássica da Teoria Eletromagnética é desenvolvida nesse espaço. Assim, sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$, representados por

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

onde A_x, A_y, A_z, B_x, B_y e B_z são números reais.

O produto escalar é uma operação entre dois vetores que permite medir quanto um vetor está na direção de outro.

Sejam dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, define-se:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre os vetores.

Do ponto de vista geométrico, o produto escalar está diretamente relacionado à componente de um vetor na direção de outro.

Definimos então o módulo de $\vec{A}$ na direção de $\vec{B}$ como:

$$A_B = \vec{A} \cdot \vec{a}_B$$

onde $\vec{a}_B$ é o versor na direção de $\vec{B}$. O versor é dado por:

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

Assim, o vetor componente de $\vec{A}$ na direção de $\vec{B}$ é dado por:

$$\vec{A}_B = (\vec{A} \cdot \vec{a}_B) \vec{a}_B$$

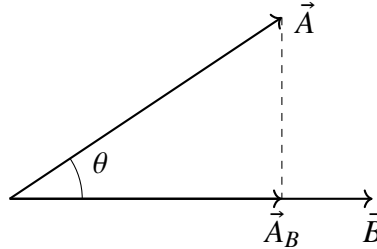


Figura 3: Projeção de um vetor sobre outro utilizando o produto escalar

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exercício 1

Encontrar o vetor componente de $\vec{A} = (1, 3, -4)$ na direção de $\vec{B} = (2, 4, -4)$.

Primeiramente, calcula-se o módulo de $\vec{B}$:

$$|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Logo, o versor na direção de $\vec{B}$ é:

$$\vec{a}_B = \frac{1}{6}(2, 4, -4) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Agora, calcula-se o produto escalar:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{a}_B &= (1, 3, -4) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} = \frac{1 + 6 + 8}{3} = \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

Portanto, o vetor componente de $\vec{A}$ na direção de $\vec{B}$ é:

$$\vec{A}_B = 5 \cdot \vec{a}_B = 5 \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\vec{A}_B = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{10}{3}\right)$$

Esse vetor representa a componente de $\vec{A}$ na direção de $\vec{B}$.

2.1.2 Produto Vetorial de Dois Vetores

O produto vetorial de dois vetores fornece um terceiro vetor, que é simultaneamente perpendicular aos outros dois e cuja direção é dada pela regra da mão direita.

Exemplo: Sejam

$$\vec{V} = (2, -1, -3), \quad \vec{B} = (1, 1, -3).$$

O produto vetorial será

$$\vec{V} \times \vec{B} = (x, y, z).$$

Para determinar o produto vetorial $\vec{V} \times \vec{B}$, escrevemos os dois vetores um embaixo do outro, na ordem em que aparece o produto:

$$\vec{V} = (2, -1, -3)$$

$$\vec{B} = (1, 1, -3)$$

Para encontrar a componente x , ignore a coluna x e observe as componentes restantes (as de y e z). Para a componente y , ignore a coluna y e analise as demais. E para a componente z , ignore a coluna z e proceda do mesmo modo.

Para x :

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal (mantém o sinal): $(-1)(-3) = 3$. Diagonal secundária (troca o sinal): $1 \cdot (-3) = -3 \Rightarrow 3$. Soma-se os dois valores: $3 + 3 = 6$.

Para y :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal (troca o sinal): $2 \cdot (-3) = -6 \Rightarrow 6$. Diagonal secundária (mantém o sinal): $1 \cdot (-3) = -3$. Soma os resultados: $6 - 3 = 3$.

Para z :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal (mantém o sinal): $2 \cdot 1 = 2$. Diagonal secundária (troca o sinal): $(-1)(1) = -1 \Rightarrow 1$. Soma os valores: $2 + 1 = 3$.

Atenção: só inverte a ordem dos sinais no componente y .

Desta forma:

$$\vec{V} \times \vec{B} = (6, 3, 3).$$

Este vetor $(6, 3, 3)$ é perpendicular tanto a $\vec{V}$ como a $\vec{B}$. Você pode verificar isso pelo produto escalar, que dará zero com ambos.

A técnica é bem simples e, quando treinada, o leitor conseguirá fazer produtos vetoriais de cabeça, sem a necessidade de cálculos matriciais.

Também é possível calcular este produto pela expressão:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \vec{n},$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores, e $\vec{n}$ é o versor perpendicular ao plano formado por eles (definido pela regra da mão direita).

2.2 Cálculo Vetorial

Antes do estudo dos tópicos de Cálculo Vetorial desenvolvidos nesta obra, é conveniente revisar alguns conceitos fundamentais de Cálculo Diferencial e Integral em várias variáveis, tais como derivadas parciais, diferenciais, gradiente, integrais múltiplas e mudança de variáveis. Nesta seção serão apresentados apenas os resultados indispensáveis para o desenvolvimento da Teoria Eletromagnética. Para um estudo mais aprofundado desses assuntos, recomenda-se a obra de Stewart ([STEWART, 2013](#)), amplamente adotada em cursos de graduação em Ciências Exatas e Engenharia.

2.2.1 Sistema de coordenadas

Na Teoria Eletromagnética, a escolha do sistema de coordenadas adequado é fundamental para simplificar a resolução de problemas baseados na simetria da fonte de campo. Além do sistema cartesiano (x, y, z) , utilizam-se os sistemas cilíndrico (ρ, φ, z) e esférico (r, θ, φ) .

É importante destacar que, diferentemente do sistema cartesiano, os versores nos sistemas curvilíneos são locais, ou seja, mudam de direção conforme a posição do ponto. Os versores $\vec{a}_\varphi$ e $\vec{a}_\theta$ acompanham o movimento dos ângulos no sentido anti-horário, enquanto $\vec{a}_\rho$ e $\vec{a}_r$ apontam sempre no sentido de crescimento do raio, assim como $\vec{a}_z$ acompanha o eixo z .

Para a análise de campos, é frequente a necessidade de converter componentes de um vetor de um sistema para outro. As Tabelas 2, 3 e 4, adaptadas de [Guimarães \(2010\)](#), apresentam as relações de transformação para bases vetoriais e coordenadas de pontos.

Tabela 2: Transformação entre bases cilíndricas e cartesianas

	$\vec{a}_\rho$	$\vec{a}_\varphi$	$\vec{a}_z$
$\vec{a}_x$	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
$\vec{a}_y$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
$\vec{a}_z$	0	0	1

Usaremos as Tabelas 2 e 3 para converter vetores entre diferentes sistemas, e a Tabela 4 para converter pontos.

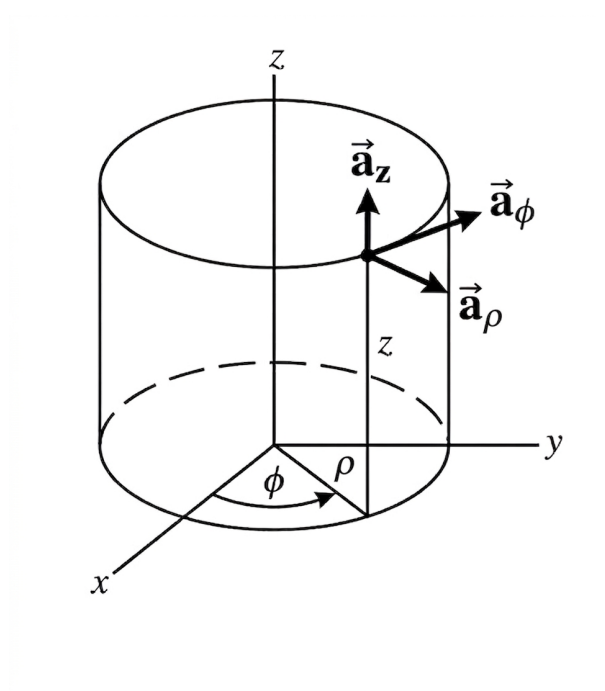


Figura 4: Sistema de coordenadas cilíndricas e seus versores.

Fonte: Elaborado pelo autor.

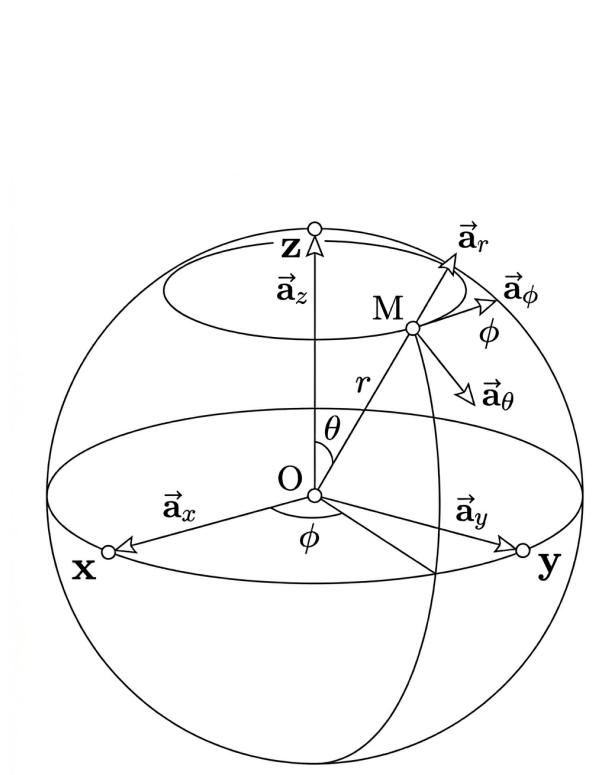


Figura 5: sistema de coordenadas esféricas e seus versores.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3: Transformação entre bases esféricas e cartesianas

	$\vec{a}_r$	$\vec{a}_\theta$	$\vec{a}_\varphi$
$\vec{a}_x$	$\sin \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \cos \varphi$	$-\sin \varphi$
$\vec{a}_y$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$\cos \varphi$
$\vec{a}_z$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

Tabela 4: Transformações de pontos entre sistemas de coordenadas

Sistema	Cartesiano	Cilíndrico	Esférico
Cartesiano	$x = x$ $y = y$ $z = z$	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
Cilíndrico	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$ $z = z$	$\rho = \rho$ $\varphi = \varphi$ $z = z$	$\rho = r \sin \theta$ $\varphi = \varphi$ $z = r \cos \theta$
Esférico	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$ $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1}(\rho/z)$ $\varphi = \varphi$	$r = r$ $\theta = \theta$ $\varphi = \varphi$

Exercício 2

Converta o vetor $\vec{A} = (10, 0, 0)$ (ou $10\vec{a}_x$) para os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

Conversão para Cilíndricas:

O vetor cilíndrico será (A_ρ, A_φ, A_z) . Para achar A_ρ , basta pegar o vetor $\vec{A}$ e colocá-lo na direção do versor $\vec{a}_\rho$, ou seja, realizar o produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{a}_\rho$:

$$A_\rho = 10\vec{a}_x \cdot \vec{a}_\rho = 10 \cos \varphi$$

Para achar A_φ , basta pegar o vetor $\vec{A}$ e colocá-lo na direção do versor $\vec{a}_\varphi$, ou seja, realizar o produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{a}_\varphi$:

$$A_\varphi = 10\vec{a}_x \cdot \vec{a}_\varphi = -10 \sin \varphi$$

Para achar A_z , basta pegar o vetor $\vec{A}$ e colocá-lo na direção do versor $\vec{a}_z$:

$$A_z = 10\vec{a}_x \cdot \vec{a}_z = 0$$

Dessa forma, o vetor em coordenadas cilíndricas é:

$$\vec{A} = 10 \cos \varphi \vec{a}_\rho - 10 \sin \varphi \vec{a}_\varphi$$

Conversão para Esféricas:

O vetor esférico será $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$. Para achar A_r , basta pegar o vetor $\vec{A}$ e colocá-lo na direção do versor $\vec{a}_r$ via produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{a}_r$:

$$A_r = 10\vec{a}_x \cdot \vec{a}_r = 10 \sin \theta \cos \varphi$$

Para achar A_θ , basta pegar o vetor $\vec{A}$ e colocá-lo na direção do versor $\vec{a}_\theta$ via produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{a}_\theta$:

$$A_\theta = 10\vec{a}_x \cdot \vec{a}_\theta = 10 \cos \theta \cos \varphi$$

Para achar A_φ , basta pegar o vetor $\vec{A}$ e colocá-lo na direção do versor $\vec{a}_\varphi$ via produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{a}_\varphi$:

$$A_\varphi = 10\vec{a}_x \cdot \vec{a}_\varphi = -10 \sin \varphi$$

Dessa forma, o vetor em coordenadas esféricas é:

$$\vec{A} = 10 \sin \theta \cos \varphi \vec{a}_r + 10 \cos \theta \cos \varphi \vec{a}_\theta - 10 \sin \varphi \vec{a}_\varphi$$

2.2.2 Integrais de Linha e Superfície

Nesta disciplina, o cálculo de integrais de linha, superfície e volume é significativamente simplificado pelo fato de que as curvas e superfícies tratadas são, em geral, padronizadas e alinhadas aos sistemas de coordenadas adotados (Cartesiano, Cilíndrico ou Esférico).

Dessa forma, a montagem da integral não exige parametrizações complexas a cada novo problema. Para o desenvolvimento dos cálculos, é necessário apenas identificar o sistema de coordenadas que melhor se ajusta à simetria do objeto e selecionar os elementos diferenciais adequados diretamente na Tabela 5.

Tabela 5: Elementos diferenciais de linha, área e volume em diferentes sistemas de coordenadas

Sistema	Linha ($d\vec{L}$)	Área ($d\vec{S}$)	Volume (dv)
Cartesiano	$dx \vec{a}_x + dy \vec{a}_y + dz \vec{a}_z$	$d\vec{S}_x = dy dz \vec{a}_x$ $d\vec{S}_y = dx dz \vec{a}_y$ $d\vec{S}_z = dx dy \vec{a}_z$	$dx dy dz$
Cilíndrico	$d\rho \vec{a}_\rho + \rho d\varphi \vec{a}_\varphi + dz \vec{a}_z$	$d\vec{S}_\rho = \rho d\varphi dz \vec{a}_\rho$ $d\vec{S}_\varphi = d\rho dz \vec{a}_\varphi$ $d\vec{S}_z = \rho d\rho d\varphi \vec{a}_z$	$\rho d\rho d\varphi dz$
Esférico	$dr \vec{a}_r + r d\theta \vec{a}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{a}_\varphi$	$d\vec{S}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{a}_r$ $d\vec{S}_\theta = r \sin \theta dr d\varphi \vec{a}_\theta$ $d\vec{S}_\varphi = r dr d\theta \vec{a}_\varphi$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

Ao aplicar esses conceitos, a integral de linha de um campo vetorial $\vec{A}$ é calculada pelo produto escalar $\int \vec{A} \cdot d\vec{L}$, enquanto a integral de superfície (fluxo) utiliza o diferencial de área vetorial $\iint \vec{A} \cdot d\vec{S}$, onde o vetor unitário da face indica a direção normal à superfície considerada.

Exercício 3

seja o campo vetorial $\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \rho \vec{a}_\rho + \sin \varphi \vec{a}_\varphi$. O objetivo é calcular o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície fechada S delimitada por $\rho \in [1, 2]$, $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$ e $z \in [0, 1]$. O fluxo total é dado pela integral de superfície fechada:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum \iint_{face} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

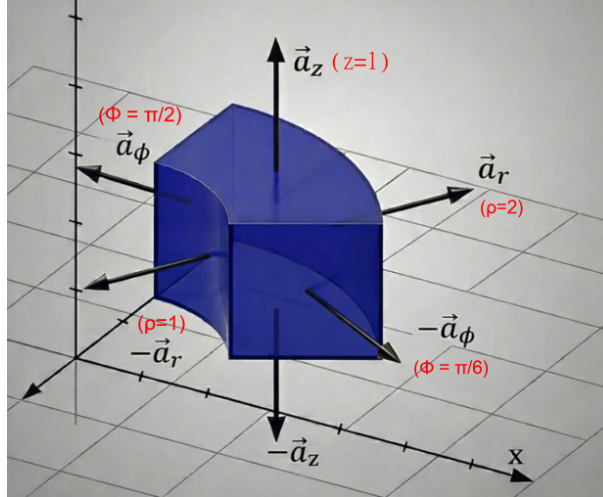


Figura 6: Superfície cilíndrica considerada

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a face cilíndrica externa ($\rho = 2$), o diferencial de área é $d\vec{S}_\rho = \rho d\varphi dz \vec{a}_\rho$. O fluxo nesta face é calculado como:

$$\iint_{S_{\rho=2}} (\rho \vec{a}_\rho + \sin \varphi \vec{a}_\varphi) \cdot (2 d\varphi dz \vec{a}_\rho) = \int_0^1 \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4 d\varphi dz = 4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

Para a face cilíndrica interna ($\rho = 1$), o vetor normal externo aponta no sentido oposto ao crescimento de ρ , logo $d\vec{S} = -1 d\varphi dz \vec{a}_\rho$:

$$\iint_{S_{\rho=1}} (\rho \vec{a}_\rho + \sin \varphi \vec{a}_\varphi) \cdot (-1 d\varphi dz \vec{a}_\rho) = \int_0^1 \int_{\pi/6}^{\pi/2} -1 d\varphi dz = -\frac{\pi}{3}$$

Nas faces planas laterais, os diferenciais dependem da direção angular. Para a face em $\varphi = \pi/2$, o vetor normal é $\vec{a}_\varphi$, resultando em $d\vec{S}_\varphi = d\rho dz \vec{a}_\varphi$:

$$\iint_{S_{\varphi=\pi/2}} (\rho \vec{a}_\rho + \sin \varphi \vec{a}_\varphi) \cdot (d\rho dz \vec{a}_\varphi) = \int_0^1 \int_1^2 \sin(\pi/2) d\rho dz = (1)(1)(1) = 1$$

Para a face em $\varphi = \pi/6$, o vetor normal externo aponta no sentido horário ($-\vec{a}_\varphi$), logo $d\vec{S} = -d\rho dz \vec{a}_\varphi$:

$$\iint_{S_{\varphi=\pi/6}} (\rho \vec{a}_\rho + \sin \varphi \vec{a}_\varphi) \cdot (-d\rho dz \vec{a}_\varphi) = \int_0^1 \int_1^2 -\sin(\pi/6) d\rho dz = -\frac{1}{2}(1)(1) = -0,5$$

Por fim, nas superfícies de topo ($z = 1$) e base ($z = 0$), o fluxo é nulo, visto que o campo vetorial $\vec{E}$ não possui componente na direção $\vec{a}_z$, tornando o produto escalar nulo. Somando as contribuições de todas as faces, obtém-se o fluxo total:

$$\Phi_{total} = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 1 - 0,5 = \pi + 0,5 \approx 3,64$$

Diferentemente das integrais de superfície, onde as superfícies já estão corretamente orientadas e não se faz necessário a parametrização (bastando apenas recorrer à tabela dos elementos diferenciais), aqui nas integrais de linha será necessário **parametrizar a curva** escolhida.

Uma integral de linha, por exemplo, de um campo magnético $\vec{B}$ ao longo de um comprimento diferencial $d\vec{l}$, é dada por:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Para descobrirmos o $d\vec{l}$ associado à curva, devemos parametrizar a curva, isto é, colocar todas as suas variáveis em função de um único parâmetro t . A curva passa a ser representada pelo vetor posição $\vec{r}(t)$, e o vetor diferencial de comprimento é definido como:

$$d\vec{l} = \vec{r}'(t) dt$$

Dessa forma, a integral é reescrita em termos de t como:

$$\int \vec{B}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

No caso de uma trajetória retilínea que liga um ponto inicial (x_0, y_0) a um ponto final (x_f, y_f) , primeiro descobrimos o vetor direção $\vec{u} = (a, b)$, dado pela diferença entre as coordenadas final e inicial:

$$a = x_f - x_0, \quad b = y_f - y_0$$

A parametrização da reta é então estabelecida pelas equações:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt$$

onde o parâmetro t varia no intervalo $[0, 1]$. O vetor posição $\vec{r}(t)$ e sua derivada $\vec{r}'(t)$ são expressos por:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + at)\vec{a}_x + (y_0 + bt)\vec{a}_y$$

$$\vec{r}'(t) = a\vec{a}_x + b\vec{a}_y$$

Após definir a trajetória, deve-se colocar o campo vetorial em função de t , substituindo as variáveis x e y pelas funções paramétricas correspondentes. Por fim, realiza-se o produto escalar $\vec{B}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ e integra-se o resultado em relação a t nos limites definidos.

Exercício 4

Calcule a integral de linha do campo $\vec{E} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y$ ao longo da reta que liga os pontos $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$.

Iniciamos determinando o vetor direção $\vec{u} = (a, b)$:

$$a = x_f - x_0 = 2 - (-2) = 4, \quad b = y_f - y_0 = 0 - 0 = 0$$

Dessa forma, o vetor direção é $\vec{u} = (4, 0)$. As equações paramétricas da reta para $t \in [0, 1]$ são:

$$x = x_0 + at = -2 + 4t, \quad y = y_0 + bt = 0 + 0t = 0$$

O vetor posição $\vec{r}(t)$ e sua respectiva derivada $\vec{r}'(t)$ são definidos por:

$$\vec{r}(t) = (-2 + 4t)\vec{a}_x + 0\vec{a}_y$$

$$\vec{r}'(t) = 4\vec{a}_x + 0\vec{a}_y$$

Agora, expressamos o campo vetorial $\vec{E}$ em função do parâmetro t , substituindo as variáveis x e y pelas funções paramétricas:

$$\vec{E}(\vec{r}(t)) = (-2 + 4t)\vec{a}_x + 0\vec{a}_y$$

O diferencial de comprimento é $d\vec{l} = \vec{r}'(t)dt = 4\vec{a}_x dt$. Realizando o produto escalar dentro da integral:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 [(-2 + 4t)\vec{a}_x] \cdot [4\vec{a}_x] dt = \int_0^1 4(-2 + 4t) dt$$

Expandindo e integrando em relação a t :

$$\int_0^1 (-8 + 16t) dt = \left[-8t + \frac{16t^2}{2} \right]_0^1 = [-8t + 8t^2]_0^1$$

Aplicando os limites de integração:

$$(-8(1) + 8(1)^2) - (-8(0) + 8(0)^2) = -8 + 8 = 0$$

2.2.3 O Operador Gradiente

O operador gradiente surge naturalmente a partir da definição de derivada direcional. Considerando uma função escalar f , a variação dessa função ao longo de uma direção $\vec{a}_l$ é dada por:

$$\frac{df}{dl} = \nabla f \cdot \vec{a}_l \implies df = \nabla f \cdot d\vec{l}$$

Analisando a expressão do diferencial do campo $df = \nabla f \cdot d\vec{l}$, podemos extrair propriedades fundamentais:

- O vetor gradiente (∇f) aponta na direção de maior variação da função. Isso ocorre porque o produto escalar atinge seu valor máximo quando o vetor gradiente e o vetor deslocamento ($d\vec{l}$) são paralelos.
- Quando o diferencial do campo é nulo ($df = 0$), o gradiente ∇f é ortogonal ao vetor deslocamento. Como $df = 0$ implica que a função não varia, estamos percorrendo uma curva (ou superfície) de nível $f(x, y, z) = c$.

Essa característica nos permite encontrar vetores ortogonais e tangentes a uma curva de maneira extremamente simples.

A expressão do gradiente em coordenadas cartesianas pode ser obtida diretamente a partir do diferencial total de uma função escalar. Para uma função $f(x, y, z)$, tem-se:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Por outro lado, o vetor deslocamento infinitesimal pode ser escrito como

$$d\vec{l} = dx \vec{a}_x + dy \vec{a}_y + dz \vec{a}_z.$$

Tomando um operador em f , tal que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Notamos que

$$df = \nabla f \cdot d\vec{l}.$$

Desse modo que a expressão do operador gradiente em coordenadas cartesianas é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{a}_z$$

Exercício 5: Dada a curva $f(x) = x^2$, encontre um vetor tangente no ponto $(2, 4)$.

Passo 1: Escrever a função como uma curva de nível padrão $f(x, y, z) = c$:

$$y - x^2 = 0$$

Passo 2: Aplicar o operador gradiente em coordenadas cartesianas:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (-2x, 1, 0)$$

Passo 3: Avaliar o gradiente no ponto $(2, 4)$:

$$\nabla f|_{(2,4)} = (-4, 1, 0)$$

Este vetor obtido é um vetor **normal** (ortogonal) à curva no ponto considerado.

Passo 4: Para encontrar um vetor tangente ($\vec{v}_t$), basta determinar um vetor cujo produto escalar com o gradiente seja nulo. Por exemplo, o vetor $(1, 4, 0)$:

$$(-4, 1, 0) \cdot (1, 4, 0) = -4 + 4 + 0 = 0$$

Para obter o versor tangente $\hat{u}_t$, normalizamos o vetor encontrado:

$$\hat{u}_t = \frac{(1, 4, 0)}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{a}_x + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{a}_y$$

Essa ferramenta de utilizar o gradiente para calcular vetores ortogonais e, por consequência, tangentes a uma curva é fantástica e auxilia na resolução de diversos problemas em eletromagnetismo.

2.2.3.1 Cálculo do Gradiente em outros Sistemas de Coordenadas

Em sistemas de coordenadas não-cartesianos, o gradiente deve levar em conta os fatores de escala de cada sistema:

Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{a}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{a}_z$$

Coordenadas Esféricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{a}_\phi$$

2.2.3.2 Teorema Fundamental do Gradiente

Partindo da relação diferencial $df = \nabla f \cdot d\vec{l}$ e integrando ambos os lados de um ponto A até um ponto B , obtemos:

$$\int_A^B df = \int_A^B \nabla f \cdot d\vec{l} \implies f(B) - f(A) = \int_A^B \nabla f \cdot d\vec{l}$$

Este teorema indica que uma integral de linha ao longo de um caminho com diferencial $d\vec{l}$ depende apenas dos pontos iniciais e finais, desde que o campo em questão seja um campo gradiente. Esta é uma propriedade de conservação fundamental; como veremos adiante, o campo elétrico é um campo gradiente, o que nos permitirá utilizar essa ferramenta para o cálculo de potencial e energia.

2.2.4 O Operador divergente

Imagine um campo vetorial $\vec{F}$ atravessando uma superfície conforme ilustra a Figura 5:

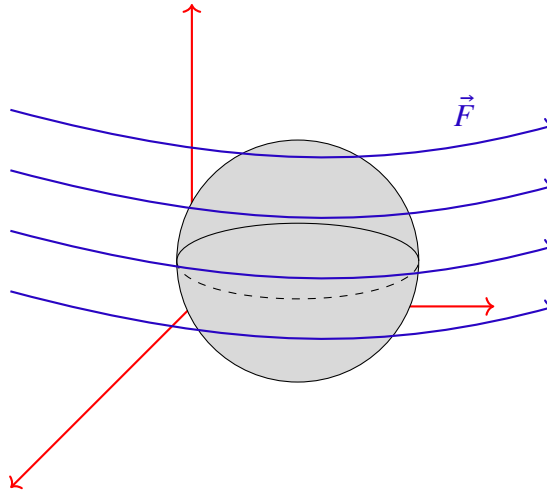


Figura 7: Superfície atravessada por um campo vetorial $\vec{F}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

O divergente é definido formalmente pela expressão:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Ou seja, o divergente é a medida do fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície fechada S . No entanto, ao fazermos o volume delimitado por essa superfície tender a zero, essa grandeza passa a representar a densidade de fluxo em um ponto específico.

Dessa forma, o divergente comporta-se como uma "derivada de volume" do fluxo de $\vec{F}$. Ele nos indica se o ponto em questão atua como uma fonte (onde o fluxo líquido de saída é positivo) ou como um sumidouro (onde o fluxo líquido é negativo).

2.2.4.1 Divergente em outros Sistemas de Coordenadas

Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Coordenadas Esféricas:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

2.2.4.2 Teorema Fundamental do Divergente (Teorema de Gauss)

O Teorema de Gauss estabelece a relação entre o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada e o comportamento do divergente desse campo no volume delimitado por tal superfície.

Partindo da relação diferencial do divergente e aplicando a integral de volume em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iiint_V \left(\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \right) dV$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a volumes, a integral do divergente sobre todo o volume V resulta no fluxo líquido total que atravessa a superfície S que o envolve:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Esta igualdade é uma das ferramentas mais poderosas do cálculo vetorial, pois permite converter uma integral de superfície complexa em uma integral de volume (ou vice-versa), dependendo de qual região apresenta maior facilidade de integração geométrica.

Exercício 6:

Provar ambos os lados do teorema de Gauss para o campo vetorial $\vec{E} = \rho \vec{a}_\rho$ através da superfície cilíndrica fechada delimitada por $x^2 + y^2 = 4$ (raio $\rho = 2$) no intervalo $0 \leq z \leq 2$.

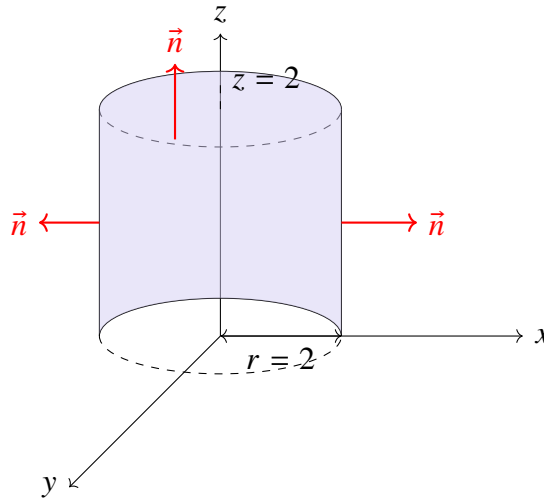


Figura 8: Superfície cilíndrica do exercício 5

Fonte: Elaborado pelo autor.

1. Cálculo do Fluxo (Integral de Superfície): O fluxo total é a soma das contribuições da superfície lateral e das tampas. Nas tampas ($z = 0$ e $z = 2$), o vetor normal é $\pm \vec{a}_z$. Como o campo $\vec{E}$ possui apenas componente radial ($\vec{a}_\rho$), o produto escalar nestas faces é zero.

Para a superfície lateral, temos $\rho = 2$ e a normal externa $\vec{n} = \vec{a}_\rho$. O elemento de área vetorial é $d\vec{S}_\rho = \rho d\phi dz \vec{a}_\rho$. Aplicando os limites:

$$\Phi = \iint_{S_{lat}} (2\vec{a}_\rho) \cdot (2 d\phi dz \vec{a}_\rho) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 4 dz d\phi = 4 \cdot (2) \cdot (2\pi) = 16\pi$$

2. Integral de Volume do Divergente: Calculamos primeiro o divergente do campo em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) = \frac{1}{\rho} (2\rho) = 2$$

Agora, integramos esse valor constante sobre o volume do cilindro, onde $dV = \rho d\rho d\phi dz$:

$$\begin{aligned} \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^2 2 \cdot \rho d\rho dz d\phi \\ \iiint_V 2 dV &= 2 \cdot \text{Volume do Cilindro} = 2 \cdot (\pi \cdot 2^2 \cdot 2) = 16\pi \end{aligned}$$

Como os dois resultados coincidem ($\Phi = 16\pi$), o Teorema do Divergente está verificado para este sistema.

2.2.4.3 O Problema do Divergente do Campo $1/r^2 \vec{a}_r$

Considere o campo vetorial $\vec{F} = \frac{1}{r^2} \vec{a}_r$ em coordenadas esféricas. Ao aplicarmos a definição direta do divergente para este sistema, temos:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0$$

Entretanto, este resultado apresenta uma contradição física e matemática conhecida como a singularidade na origem. Se integrarmos o fluxo deste campo através de uma superfície esférica de raio R , obtemos:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{R^2} \vec{a}_r \right) \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{a}_r) = 4\pi$$

Pelo Teorema de Gauss, o fluxo deveria ser igual à integral de volume do divergente ($\iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$). Se o divergente fosse zero em todos os pontos, a integral de volume seria zero, o que contradiz o fluxo de 4π calculado. O erro reside no fato de que o divergente é zero em todos os lugares, *exceto* na origem ($r = 0$), onde o campo tende ao infinito e a derivada não é bem definida.

Para resolver este problema, introduzimos a Função Delta de Dirac ($\delta^3(\vec{r})$). Esta função é definida como sendo zero em todos os pontos exceto na origem, onde é infinita, possuindo a propriedade de "filtragem" que satisfaz:

$$\iiint_V \delta^3(\vec{r}) dV = 1$$

Inferimos, portanto, que para o Teorema do Divergente ser válido, a expressão correta para o divergente desse campo deve carregar essa informação da origem:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{a}_r}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

Dessa forma, a integral de volume "filtra" a função Delta, resultando no valor correto do fluxo:

$$\iiint_V 4\pi\delta^3(\vec{r}) dV = 4\pi(1) = 4\pi$$

Esta conclusão é fundamental para a eletrostática, pois representa o divergente do campo elétrico de uma carga puntiforme localizada na origem, onde a densidade de carga é representada justamente por uma função Delta.

2.2.5 O Operador rotacional

Imagine um campo vetorial $\vec{F}$ atravessando uma superfície conforme ilustra a Figura 7:

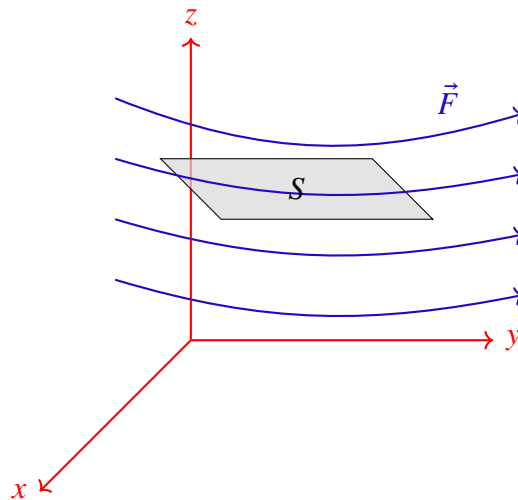


Figura 9: Superfície plana atravessada por um campo vetorial $\vec{F}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

O rotacional é definido formalmente pela expressão:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Ou seja, o rotacional é a medida da circulação do campo $\vec{F}$ ao longo de um percurso fechado C . No entanto, ao fazermos a área S delimitada por essa curva tender a zero, essa grandeza passa a representar a circulação por unidade de área em um ponto específico. Dessa forma, o rotacional assemelha-se a uma "derivada de superfície" da circulação de $\vec{F}$.

O cálculo em coordenadas cartesianas pode ser feito como o produto vetorial (estudado na Seção 2.2) do operador nabla (∇) com o vetor $\vec{F}$:

Exercício 7:

Calcule o rotacional do campo vetorial $\vec{E} = (x^2, xy, 0)$.

Nesse ponto, peço ao leitor recordar a forma prática que aprendemos para fazer um produto vetorial. Aqui, no rotacional, será a mesma coisa: faremos o produto vetorial do **vetor operador** $\vec{\nabla}$ com o campo $\vec{E}$.

Assim, de acordo com o que aprendemos:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\vec{E} = (x^2, xy, 0).$$

Logo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = (0, 0, y).$$

Caso não se recorde, volte à Seção 2.2 de produtos vetoriais; é uma forma bem prática que evita os cálculos matriciais.

2.2.5.1 Rotacional em outros Sistemas de Coordenadas

Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla \times \vec{F} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right] \vec{a}_\rho + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \vec{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right] \vec{a}_z$$

Coordenadas Esféricas:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(F_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right] \vec{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \vec{a}_\phi$$

2.2.5.2 Propriedades do Rotacional

No cálculo do rotacional, integramos o campo ao longo de um percurso fechado e fazemos a área delimitada tender a zero. Mas o que acontece se esse campo for **conservativo**?

Sabemos, pelo teorema do gradiente, que:

$$\int_A^B \nabla V \cdot d\vec{l} = V(B) - V(A).$$

Em um percurso fechado, os pontos inicial e final coincidem ($A = B$), logo:

$$\oint_C \nabla V \cdot d\vec{l} = 0.$$

Portanto, o rotacional de um campo conservativo (ou seja, que pode ser escrito como gradiente de um potencial) é nulo:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}.$$

Em particular, o **rotacional de um campo elétrico eletrostático** é igual a zero:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}.$$

Essas propriedades expressam a consistência interna das operações diferenciais aplicadas a campos escalares e vetoriais, e terão grande importância em formulações posteriores das equações de Maxwell.

2.2.5.3 Teorema do Rotacional (Teorema de Stokes)

Pela definição do rotacional, temos:

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Tomando a integral de superfície dos dois lados, obtemos:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Essa relação é o **Teorema de Stokes**, que transforma uma **integral de linha** em uma **integral de superfície** (ou vice-versa), desde que as orientações sejam compatíveis conforme a regra da mão direita.

Exercício 8

Verifique o teorema de Stokes para o campo vetorial:

$$\vec{E} = \rho \vec{a}_\varphi \quad (\text{em coordenadas cartesianas } \vec{E} = -y \vec{a}_x + x \vec{a}_y + 0 \vec{a}_z)$$

Seja o contorno fechado $C : x^2 + y^2 = 1, z = 0$, orientado no sentido anti-horário. A superfície S associada é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano $z = 0$, com vetor normal unitário orientado por $\vec{n} = +\vec{a}_z$ (conforme a regra da mão direita).

1. Integral de superfície (lado do rotacional):

Utilizando a expressão do rotacional em coordenadas cilíndricas para as componentes $E_\rho = 0, E_\varphi = \rho$ e $E_z = 0$, calculamos a componente normal à superfície (direção z):

$$(\nabla \times \vec{E})_z = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \rho) = \frac{1}{\rho} (2\rho) = 2$$

O elemento diferencial de área vetorial no plano $z = 0$ é $d\vec{S} = \rho d\rho d\varphi \vec{a}_z$. Assim, a integral de superfície do rotacional resulta em:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2 (\rho d\rho d\varphi)$$

Resolvendo a integração:

$$\int_0^{2\pi} [\rho^2]_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \boxed{2\pi}$$

2. Integral de linha (circulação do campo):

Para a integral ao longo do contorno C , parametrizamos a borda do disco onde $\rho = 1$ é constante. O diferencial de linha é $d\vec{l} = \rho d\varphi \vec{a}_\varphi = 1 d\varphi \vec{a}_\varphi$. O campo avaliado no contorno é $\vec{E}|_{\rho=1} = 1 \vec{a}_\varphi$.

Calculando a circulação:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (1 \vec{a}_\varphi) \cdot (1 d\varphi \vec{a}_\varphi) = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \boxed{2\pi}$$

Conclusão:

Como ambos os métodos resultaram no mesmo valor:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = 2\pi$$

O **Teorema de Stokes** está verificado para este sistema.

2.3 Eletrostática

A Eletrostática constitui o primeiro ramo da Teoria Eletromagnética e dedica-se ao estudo das interações entre cargas elétricas em repouso. Ao longo deste capítulo serão desenvolvidos os principais conceitos, leis e ferramentas matemáticas que fundamentam essa teoria, servindo de base para os capítulos posteriores. Para um aprofundamento dos tópicos abordados, recomenda-se a leitura da obra de Griffiths ([GRIFFITHS, 2011](#)), considerada uma das principais referências em Eletromagnetismo em nível de graduação. Além disso, o leitor poderá complementar seus estudos por meio das videoaulas disponibilizadas pelo canal *Eletromagnetismo UFF*, cujo conteúdo acompanha grande parte dos assuntos desenvolvidos neste livro ([Eletromagnetismo UFF, 2026](#)).

2.3.1 O campo elétrico

A partir daqui este trabalho apresentará os tópicos de eletromagnetismo de maneira teórica e textual, uma vez que as bases necessárias ao entendimento de toda a disciplina foi abordada na sessão anterior juntamente com exercícios, não fazendo necessário uma igual tratativa aos conteúdos subsequentes. A seguir, temos uma representação geométrica para a formulação da lei de Coulomb, de onde estamos interessados no cálculo do campo elétrico em um ponto P qualquer, devido a uma distribuição de cargas.

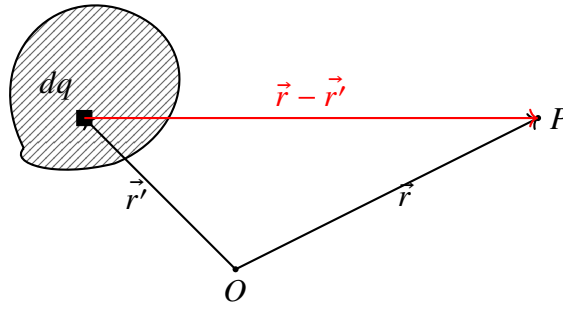


Figura 10: Geometria para a Lei de Coulomb com elemento de carga dq

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com (GRIFFITHS, 2011), o tratamento de problemas eletrostáticos com múltiplas fontes exige uma abordagem baseada no princípio da superposição. Considere uma distribuição contínua de cargas e deseja-se determinar o campo elétrico em um ponto P do espaço. Inicialmente, define-se a origem do sistema de coordenadas no ponto O . A distribuição de cargas será tomada como um referencial “com linha”, isto é, associado a grandezas dependentes da posição dentro da distribuição, enquanto o ponto P será um referencial “sem linha”.

Seja $\vec{r}'$ o vetor posição que vai da origem O até um elemento infinitesimal de carga dq pertencente à distribuição, e $\vec{r}$ o vetor posição que vai da origem até o ponto de observação P . A distância entre o elemento de carga e o ponto P é dada pelo vetor:

$$\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}'$$

De acordo com a Lei de Coulomb, o campo elétrico infinitesimal produzido pelo elemento de carga dq no ponto P é:

$$d\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{r-r'}$$

onde $\hat{a}_{r-r'}$ é o versor unitário na direção do vetor $\vec{r} - \vec{r}'$.

Escrevendo o elemento de carga em termos da densidade volumétrica de carga $\rho(\vec{r}')$, tem-se:

$$dq = \rho(\vec{r}') dv'$$

Portanto, o campo elétrico total no ponto P é obtido pela superposição de todos os campos infinitesimais:

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{r-r'}$$

Como o versor pode ser escrito na forma:

$$\hat{a}_{r-r'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

obtém-se a expressão vetorial final:

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

Este modo de calcular o campo elétrico por meio da integração direta da Lei de Coulomb é extremamente útil para distribuições de carga simples e que apresentam alto grau de simetria, como veremos a seguir.

2.3.1.1 Campo Elétrico de um Fio Finito e Uniforme

Considere um fio retilíneo de comprimento $2L$, uniformemente carregado, disposto ao longo do eixo x , com densidade linear de carga constante λ . Deseja-se determinar o campo elétrico em um ponto P , localizado a uma distância z do centro do fio, conforme ilustrado na Figura 9:

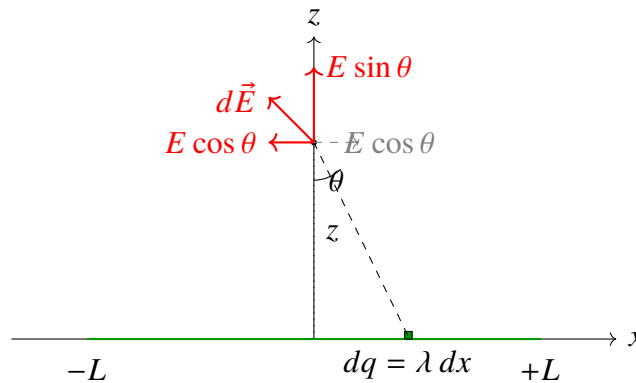


Figura 11: Campo elétrico de um fio finito: decomposição e cancelamento das componentes horizontais

Fonte: Elaborado pelo autor.

Um elemento infinitesimal de carga do fio pode ser escrito em termos da densidade linear como:

$$dq = \lambda dx$$

A distância entre o elemento dq (posicionado em x) e o ponto de observação P é:

$$d = \sqrt{x^2 + z^2}$$

O campo elétrico infinitesimal produzido por dq em P é dado por:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{d^2} \hat{a}_d$$

Devido à simetria da configuração, para cada elemento dq em $+x$, existe um elemento simétrico em $-x$. As componentes horizontais (dE_x) desses campos se cancelam mutuamente,

restando apenas a componente resultante na direção do eixo z . Assim, a componente vertical útil do campo é:

$$dE_z = dE \cos \theta$$

Pela geometria do problema, observamos que $\cos \theta = \frac{z}{d} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$. Substituindo esses valores, obtemos:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

Portanto, o campo elétrico total no ponto P é dado pela integral ao longo de todo o comprimento do fio:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{\lambda z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dx$$

Após realizar a integração (utilizando substituição trigonométrica $x = z \tan \theta$), chega-se à expressão clássica do campo elétrico produzido por um fio finito:

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z\sqrt{L^2 + z^2}}$$

Analisando agora o caso limite em que o comprimento do fio tende ao infinito ($L \rightarrow \infty$), a expressão dentro da raiz simplifica-se, pois $L^2 \gg z^2$:

$$\sqrt{L^2 + z^2} \approx L$$

Substituindo este limite na expressão anterior, obtém-se:

$$E(z) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{zL} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}$$

Essa é a expressão clássica do campo elétrico gerado por um fio retilíneo infinito uniformemente carregado, mostrando que o modelo de fio infinito pode ser interpretado como um limite físico prático para pontos muito próximos de fios finitos reais.

2.3.2 O divergente do campo elétrico: A Lei de Gauss - Forma Diferencial

O campo elétrico gerado por uma distribuição contínua de cargas é dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{a}_{r-r'}$$

onde $\hat{a}_{r-r'}$ é o versor que aponta do elemento de carga na posição $\vec{r}'$ até o ponto de observação $\vec{r}$.

Aplicando o operador divergente em relação às coordenadas de $\vec{r}$, temos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \left[\nabla \cdot \left(\frac{\hat{a}_{r-r'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right] dV'$$

Conforme discutido anteriormente, a divergência do termo radial em relação à distância relativa é uma função delta de Dirac localizada no ponto da fonte:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{a}_{r-r'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) = 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

Substituindo esse resultado na integral:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \left[4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \right] dv'$$

Simplificando os termos constantes:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') dv'$$

A função delta de Dirac possui a propriedade de "filtragem", que seleciona o valor da função $\rho(\vec{r}')$ exatamente no ponto onde o argumento da delta é zero, ou seja, onde $\vec{r}' = \vec{r}$. Assim, a integral resulta na densidade de carga no ponto de observação:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

2.3.3 A Lei de Gauss na Forma Integral

Partindo da forma diferencial e integrando em um volume V :

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Aplicando o Teorema do Divergente (Teorema de Gauss) ao lado esquerdo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

onde Q_{int} é a carga total interna ao volume delimitado pela superfície fechada S . Esta expressão mostra que o fluxo elétrico total através de uma superfície fechada é proporcional à carga líquida em seu interior.

Em última análise, podemos concluir que a Lei de Gauss é, essencialmente, o resultado da aplicação do operador divergente sobre a expressão fundamental do campo elétrico derivada da Lei de Coulomb. Sob uma perspectiva matemática estrita, não há conteúdo físico na Lei de Gauss que já não esteja implicitamente contido na Lei de Coulomb; ambas são descrições matematicamente equivalentes da interação eletrostática.

A distinção fundamental entre elas reside na aplicabilidade prática: enquanto a Lei de Coulomb é uma ferramenta direta para o cálculo do campo por meio da integração sobre distribuições de carga conhecidas, a Lei de Gauss revela a relação local entre o campo e sua fonte (densidade de carga). Ela oferece uma vantagem analítica extraordinária em problemas com alto grau de simetria, permitindo determinar o campo elétrico de forma elegante, sem a necessidade de integrais vetoriais complexas. Assim, a escolha entre uma ou outra não é uma questão de validade física, mas de estratégia matemática para a resolução eficiente de problemas.

2.3.4 O Rotacional do Campo Elétrico

Vimos anteriormente que a Lei de Gauss relaciona o divergente do campo elétrico com a densidade de carga local. Agora, analisaremos o comportamento do rotacional do campo eletrostático.

Para provar que o rotacional de um campo elétrico gerado por cargas estáticas é nulo, partimos da expressão do campo para uma carga pontual na origem:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{a}_r$$

em que

$$r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|,$$

corresponde à distância entre a carga pontual, localizada em $\mathbf{R}'$, e o ponto de observação $\mathbf{R}$, onde se deseja determinar o campo elétrico. O versor radial é definido por

$$\hat{a}_r = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}'}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|},$$

apontando da carga em direção ao ponto de observação.

Uma propriedade fundamental do cálculo vetorial é que o gradiente da função escalar $(1/r)$ resulta em:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \hat{a}_r$$

Dessa forma, podemos reescrever o campo elétrico como o gradiente negativo de um potencial escalar:

$$\vec{E} = -\nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

Ao aplicarmos o operador rotacional em ambos os lados da equação, utilizamos a identidade vetorial fundamental que estabelece que o rotacional de qualquer gradiente é identicamente nulo ($\nabla \times \nabla V = \vec{0}$):

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left[-\nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \right] = \vec{0}$$

Generalização e Significado Físico

Devido ao princípio da superposição, se o rotacional do campo de uma única carga pontual é zero, o rotacional do campo gerado por qualquer distribuição estática de cargas também será zero:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

Este resultado implica que o campo eletrostático é um **campo conservativo**. Fisicamente, isso significa que a integral de linha do campo elétrico (o trabalho realizado por unidade de carga) ao longo de qualquer percurso fechado é nula:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Esta característica permite a definição do potencial elétrico V , uma vez que a diferença de potencial entre dois pontos independe do caminho percorrido. Vale ressaltar que esta propriedade de rotacional nulo é exclusiva da **eletrostática**; em fenômenos dinâmicos, como veremos nas Equações de Maxwell, um campo magnético variante no tempo poderá gerar um campo elétrico com rotacional não nulo.

2.3.5 O Potencial Elétrico

Como demonstrado anteriormente, o campo eletrostático possui a propriedade fundamental de ser irrotacional ($\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$). Isso nos permite expressar o campo elétrico como o gradiente negativo de uma função escalar, denominada **potencial elétrico** (V).

Partindo da expressão para uma carga pontual, observamos que o campo pode ser escrito como:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r = -\nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

Dessa forma, define-se o potencial elétrico V gerado por uma única carga pontual como:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para uma distribuição contínua de cargas, utilizando o princípio da superposição, o potencial total em um ponto $\vec{r}$ é obtido pela integral sobre todo o volume da fonte:

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv'$$

O Teorema do Gradiente e a Conservação

Ao aplicarmos o teorema do gradiente à relação entre campo e potencial, podemos relacionar a diferença de potencial entre dois pontos A e B com a integral de linha do campo elétrico:

$$\int_A^B dV = \int_A^B \nabla V \cdot d\vec{l} \implies V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Invertendo os limites de integração, temos a forma usual:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Esta expressão confirma que o campo elétrico é **conservativo**: o trabalho realizado para mover uma carga entre dois pontos depende exclusivamente das posições inicial (A) e final (B), sendo independente do caminho percorrido.

Definição do Potencial em um Ponto

Sob essa perspectiva, para definirmos o valor absoluto do potencial em um único ponto A , estabelecemos convencionalmente um ponto de referência no infinito onde o potencial é nulo ($V(\infty) = 0$). Assim, o potencial em A é o trabalho por unidade de carga necessário para trazê-la do infinito até o ponto considerado:

$$V(A) = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Comentários Adicionais

É importante notar que, enquanto o campo elétrico é uma grandeza vetorial (possui direção e sentido), o potencial elétrico é uma **grandeza escalar**. Isso torna o tratamento de problemas via potencial muito mais simples do ponto de vista computacional, pois não precisamos lidar com componentes vetoriais durante a integração. Uma vez conhecido o potencial em todo o espaço, o campo elétrico pode ser recuperado facilmente através da operação de gradiente: $\vec{E} = -\nabla V$.

2.3.6 Condições de Contorno para o Campo Elétrico

Ao analisarmos a interface entre dois meios diferentes (Meio 1 e Meio 2), as leis de Gauss e do rotacional impõem restrições específicas sobre as componentes normal e tangencial do campo elétrico.

Componente Normal (E_n): Aplicamos a Lei de Gauss na forma integral a uma superfície gaussiana cilíndrica de altura infinitesimal que atravessa a interface.

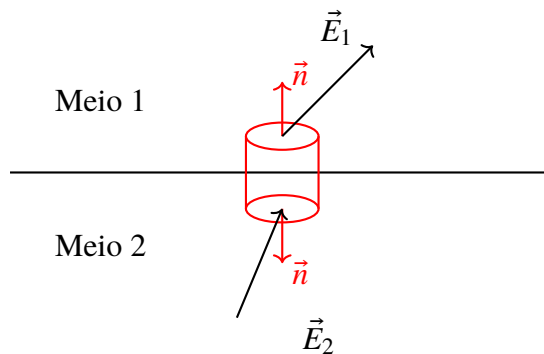


Figura 12: Superfície gaussiana atravessando a interface entre dois meios.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Lei de Gauss, o fluxo total através do cilindro é igual à carga interna. No limite em que a altura do cilindro tende a zero, apenas as tampas contribuem para o fluxo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = (E_{1n} - E_{2n})A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Onde σ é a densidade superficial de carga na interface. Assim, a descontinuidade da componente normal é dada por:

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Componente Tangencial (E_t): Para a componente tangencial, utilizamos o fato de que o rotacional do campo eletrostático é nulo, o que implica que a circulação em um caminho fechado é zero. Consideramos um caminho retangular infinitesimal atravessando a interface.

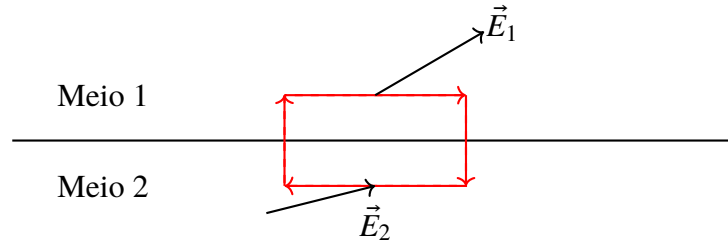


Figura 13: Caminho fechado atravessando a interface entre dois meios.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Aplicando $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, e fazendo a altura do retângulo tender a zero:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1t} \cdot \Delta l - E_{2t} \cdot \Delta l = 0$$

Resultando na condição de continuidade:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Essas deduções mostram que, enquanto a componente tangencial do campo elétrico é sempre contínua através de uma fronteira, a componente normal sofre uma descontinuidade proporcional à densidade de carga superficial presente na interface.

2.3.7 Energia no Campo Eletrostático

O trabalho realizado pela força elétrica sobre uma carga de prova ao longo de um deslocamento infinitesimal é definido por $W = \int \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = \int q\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Como vimos que $\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_i - V_f$, o trabalho realizado pelo campo é $W = q(V_i - V_f)$.

Para determinar a energia armazenada em uma configuração de cargas, o procedimento é análogo, porém consideramos o trabalho de uma **força externa** ($\vec{F}_{ext}$) necessário para trazer as cargas do infinito até suas posições finais.

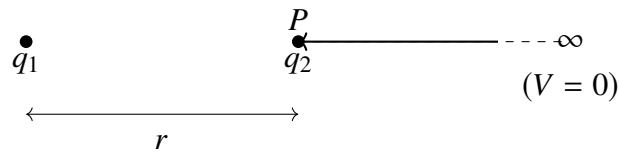


Figura 14: Montagem de duas cargas pontuais: a carga q_2 é trazida do infinito até o ponto P, a uma distância r da carga q_1 .

Fonte: Elaborado pelo autor.

A força externa necessária para mover a carga sem aceleração é sempre oposta à força elétrica ($\vec{F}_{ext} = -q\vec{E}$). Assim, o trabalho externo é:

$$W_{ext} = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^P q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q(V_{\infty} - V_P)$$

Como definimos $V_{\infty} = 0$, temos $W_{ext} = q_2 V_P$. O potencial no ponto P, gerado pela carga q_1 já presente, é $V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$. Logo, a energia armazenada no sistema de duas cargas é:

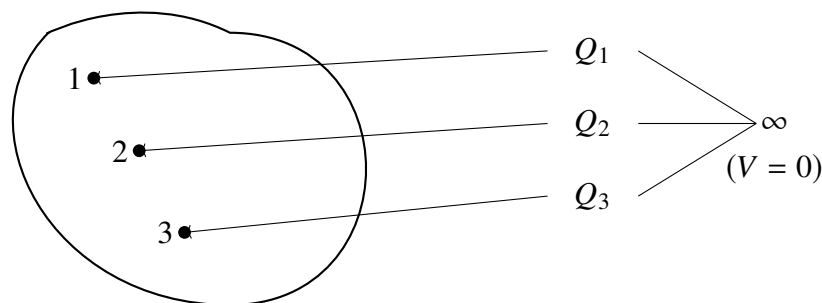
$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

Note que se as cargas tiverem o mesmo sinal, a energia é positiva (trabalho contra a repulsão); se forem opostas, a energia é negativa. Espontaneamente, o sistema tende a evoluir para estados de menor energia potencial.

Energia de um Sistema de Múltiplas Cargas

Para compreender a energia armazenada em um sistema com n cargas, calculamos o trabalho total necessário para realizar a montagem da configuração. O princípio fundamental utilizado é que o trabalho de uma força externa para trazer uma carga do infinito até um ponto P é dado por $W = q \cdot V_P$, onde V_P é o potencial no ponto P resultante de todas as cargas que já foram posicionadas.

Considere uma região do espaço inicialmente vazia:



Região inicialmente sem cargas

Figura 15: Representação do processo de montagem de cargas a partir do infinito para uma região inicialmente sem cargas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

1. **Inserção da carga q_1 :** Ao trazer a primeira carga, não existe potencial pré-existente na região ($V_f = 0$). Portanto, o trabalho para posicioná-la é nulo:

$$W_1 = q_1 \cdot 0 = 0$$

2. **Inserção da carga q_2 :** Agora, a carga q_1 já estabeleceu um potencial no espaço. Ao trazer q_2 para um ponto $\vec{r}_2$, o trabalho necessário depende do potencial $V_{1,2}$ (potencial que a carga 1 exerce na posição da carga 2):

$$W_2 = q_2 \cdot V_{1,2}$$

3. **Inserção da carga q_3 :** Para a terceira carga, o potencial no ponto de destino é a soma dos potenciais gerados pelas cargas 1 e 2 já presentes. Assim, o trabalho é:

$$W_3 = q_3 \cdot (V_{1,3} + V_{2,3})$$

O trabalho total para montar este sistema de 3 cargas é a soma das etapas:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + q_2 V_{1,2} + q_3 (V_{1,3} + V_{2,3})$$

Para generalizar, imaginamos o processo inverso: se montássemos o sistema começando por q_3 , depois q_2 e por fim q_1 . O trabalho total seria o mesmo, mas as parcelas seriam:

$$W = q_3 \cdot 0 + q_2 \cdot V_{3,2} + q_1 \cdot (V_{3,1} + V_{2,1})$$

Somando as duas equações, obtemos $2W$. Ao agrupar os termos pela carga q_i , notamos que cada carga fica multiplicada pela soma de todos os potenciais que as outras exercem sobre ela:

$$2W = q_1 \underbrace{(V_{3,1} + V_{2,1})}_{V_1} + q_2 \underbrace{(V_{1,2} + V_{3,2})}_{V_2} + q_3 \underbrace{(V_{1,3} + V_{2,3})}_{V_3}$$

Onde V_1 é o potencial total no local de q_1 , V_2 no local de q_2 e assim por diante. Disso, decorre a expressão geral para n cargas:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

O fator $1/2$ surge para corrigir a contagem dupla das interações entre os pares. No limite de uma distribuição contínua, a carga q_i torna-se um elemento diferencial $\rho(\vec{r}') dv'$, resultando na integral:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') dv'$$

Embora a expressão anterior descreva a energia em termos das fontes (cargas e potenciais), é possível demonstrar que a energia armazenada pode ser expressa exclusivamente em termos do campo elétrico resultante em todo o espaço. Para realizar essa transição matemática, aplica-se

primeiramente a Lei de Gauss na forma diferencial, substituindo a densidade volumétrica de carga por $\rho = \varepsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})$:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) V dv'$$

Para simplificar o integrando, recorre-se à identidade fundamental do cálculo vetorial que rege o divergente do produto de um escalar f por um vetor $\vec{A}$:

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \vec{A})$$

Para fins de intuição matemática, pode-se pensar neste operador como a regra do produto da derivada convencional. Ao expandir o termo $\nabla \cdot (V\vec{E})$, o operador atua de forma linear sobre cada componente: mantendo-se o vetor campo $\vec{E}$ e aplicando o operador ao potencial, obtém-se o produto escalar com o gradiente ($\vec{E} \cdot \nabla V$); mantendo-se o escalar V e aplicando o operador ao campo, obtém-se o produto com o divergente ($V(\nabla \cdot \vec{E})$).

Isolando o termo presente na integral ($V(\nabla \cdot \vec{E})$), a identidade assume o arranjo:

$$V(\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla \cdot (V\vec{E}) - \vec{E} \cdot \nabla V$$

Sabendo que o campo relaciona-se com o potencial por $\vec{E} = -\nabla V$ (ou seja, $\nabla V = -\vec{E}$), o último termo simplifica-se para $-\vec{E} \cdot (-\vec{E}) = |\vec{E}|^2$. Substituindo essa expansão de volta na integral de volume, o termo desmembra-se na soma de duas novas integrais:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot (V\vec{E}) dv' + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dv'$$

A primeira integral de volume pode ser convertida em uma integral sobre a superfície fechada S que limita o domínio por meio da aplicação direta do Teorema da Divergência (Teorema de Gauss):

$$\int_V \nabla \cdot (V\vec{E}) dv' = \oint_S (V\vec{E}) \cdot d\vec{S}'$$

Ao estendermos as fronteiras de integração para abranger **todo o espaço**, o volume V torna-se infinito e a superfície fechada S afasta-se para o infinito. Como o potencial de uma distribuição localizada decai com pelo menos $1/r$ e o campo elétrico com $1/r^2$, o produto $V\vec{E}$ decai com $1/r^3$. Dado que a área da superfície da esfera cresce apenas com r^2 , a integral de superfície remanescente converge identicamente para zero no limite em que $r \rightarrow \infty$.

Dessa forma, restando apenas a segunda contribuição integral, a energia total assume sua forma mais moderna e abrangente:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\text{todo o espaço}} |\vec{E}|^2 dV$$

Esta formulação altera profundamente a interpretação física do fenômeno: ela sugere que a energia não reside nas cargas propriamente ditas, mas sim no **campo elétrico** distribuído

pelo vácuo. Sob essa perspectiva, o termo $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ representa uma densidade de energia local, estabelecendo que onde houver campo elétrico, haverá energia armazenada no espaço. Essa conclusão é um pilar fundamental para o estudo de ondas eletromagnéticas e para a formulação completa das Equações de Maxwell.

Exemplo 1: Calcular a energia armazenada no interior do cabo coaxial abaixo

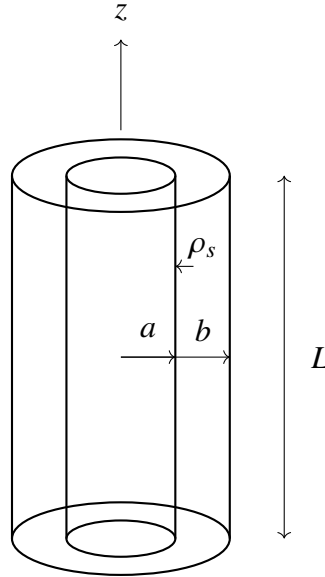


Figura 16: Cabo coaxial de comprimento L ao longo do eixo z , com raio interno a e externo b , apresentando densidade superficial de carga ρ_s na superfície interna.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando a Lei de Gauss para uma superfície cilíndrica de raio ρ ($a < \rho < b$), a carga total envolvida é $Q_{int} = \rho_s(2\pi aL)$. O campo elétrico na região entre os condutores é:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \implies E \cdot (2\pi\rho L) = \frac{2\pi aL\rho_s}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\rho_s a}{\rho\epsilon_0}$$

A energia total armazenada no campo é dada pela integral de volume do quadrado do campo elétrico em todo o espaço onde ele existe (neste caso, apenas entre a e b):

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV$$

O elemento de volume em coordenadas cilíndricas é $dV = \rho d\rho d\phi dz$. Substituindo o campo:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \rho} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz$$

Retirando as constantes da integral:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{\rho_s^2 a^2}{\epsilon_0^2} \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho$$

As integrais em z e ϕ resultam em L e 2π , respectivamente. A integral em ρ resulta no logaritmo natural:

$$W = \frac{\rho_s^2 a^2}{2\epsilon_0} \cdot (L) \cdot (2\pi) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Simplificando a expressão, obtemos a energia total armazenada no interior do cabo:

$$W = \frac{\pi L \rho_s^2 a^2}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exemplo 2: Calcular a energia armazenada no capacitor abaixo:

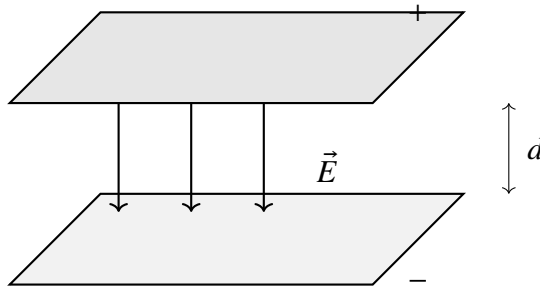


Figura 17: Representação de um capacitor de placas paralelas, separadas por uma distância d , com campo elétrico uniforme.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como o campo elétrico entre as placas é uniforme, a diferença de potencial U (ou V) entre elas pode ser obtida pela integral de linha:

$$U = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} \implies U = E \int_0^d dl \implies U = E \cdot d$$

Utilizando a formulação moderna da energia em termos do campo elétrico uniforme $E = \sigma/\epsilon_0$:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV$$

Como o campo é constante em todo o volume $V = A \cdot d$ entre as placas:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 (A \cdot d)$$

Substituindo $E = U/d$ na expressão acima:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{U}{d}\right)^2 (A \cdot d) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right) U^2$$

Observa-se que o termo entre parênteses depende exclusivamente da geometria do dispositivo (área e distância) e do meio. Este termo é definido como a **capacitância** (C) do capacitor:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Dessa forma, a energia armazenada pode ser escrita na forma clássica:

$$W = \frac{1}{2}CU^2$$

O a definição e cálculo da capacitância, será o objeto de nosso estudo na próxima seção.

2.3.8 Cálculo da Capacitância

A capacitância (C) é uma medida da capacidade de um sistema de condutores de armazenar carga elétrica para uma determinada diferença de potencial. Ela é definida matematicamente pela razão entre a magnitude da carga Q em um dos condutores e a diferença de potencial U entre eles:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Para o cálculo da capacitância de qualquer configuração, seguimos o procedimento padrão:

1. Determinamos a carga elétrica $\vec{E}$ entre os condutores utilizando a Lei de Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q/\epsilon_0$.
2. Calculamos a diferença de potencial U através da integral de linha do campo: $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$.
3. Substituímos Q e U na definição de C .

1. Cabo Coaxial

Retomando o cabo coaxial de comprimento L e raios a e b , vimos que o campo elétrico é $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L\rho}$. A diferença de potencial entre os cilindros é:

$$U = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L\rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Aplicando a definição $C = Q/U$:

$$C_{\text{coaxial}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

2. Capacitor Esférico

Considere duas cascas condutoras esféricas concêntricas de raios a (interna) e b (externa).

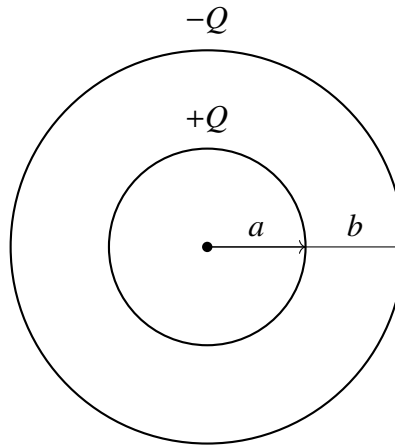


Figura 18: Capacitor esférico formado por duas superfícies condutoras concêntricas de raios a e b , carregadas com cargas $+Q$ e $-Q$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Lei de Gauss, o campo entre as esferas ($a < r < b$) é $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. A diferença de potencial é calculada por:

$$U = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

Substituindo na definição de capacitância, obtemos:

$$C_{\text{esférico}} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(b-a)}{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

Observação

Note que, em ambos os casos, a capacitância resultante depende exclusivamente de constantes físicas (ϵ_0) e de parâmetros geométricos do dispositivo, confirmando que a capacitância é uma propriedade intrínseca da geometria do sistema.

2.3.9 Equações de Poisson e Laplace

Partindo da Lei de Gauss na forma diferencial, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, e sabendo que o campo eletrostático é irrotacional, podemos defini-lo como o gradiente negativo do potencial escalar ($\vec{E} = -\nabla V$). Substituindo uma na outra, obtemos a relação fundamental:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esta é a **Equação de Poisson**. Em regiões do espaço onde não há densidade de carga ($\rho = 0$), a equação se simplifica para a **Equação de Laplace**:

$$\nabla^2 V = 0$$

Resolução em uma dimensão (1D)

Em uma dimensão, a Equação de Laplace reduz-se a uma derivada segunda nula:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \implies V(x) = ax + b$$

Esta solução demonstra que, em regiões livres de carga em 1D, o potencial varia linearmente, comportando-se como uma equação de reta.

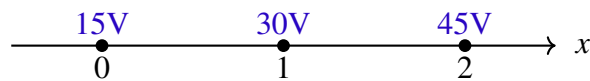


Figura 19: Distribuição de potencial ao longo de uma dimensão.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como ilustrado na Figura 19, se tivermos pontos em $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ com potenciais 15V, 30V e 45V respectivamente, temos que encontrar os coeficientes a e b que satisfazem a equação da reta:

temos que encontrar os coeficientes a e b que satisfazem a equação da reta:

A partir dos pontos fornecidos no gráfico da Figura 20, podemos montar um sistema simples. Para $x = 0$, temos $V(0) = 15$, o que nos dá diretamente o coeficiente linear:

$$15 = a(0) + b \implies b = 15$$

Para $x = 1$, temos $V(1) = 30$. Substituindo o valor de b :

$$30 = a(1) + 15 \implies a = 15$$

Assim, a equação que descreve o potencial para este caso é $V(x) = 15x + 15$.

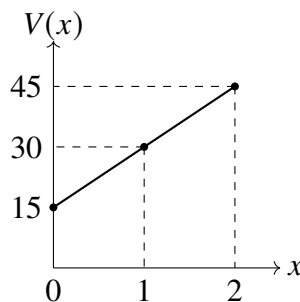


Figura 20: Representação do potencial elétrico em função da posição, evidenciando comportamento linear.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Propriedade da Média

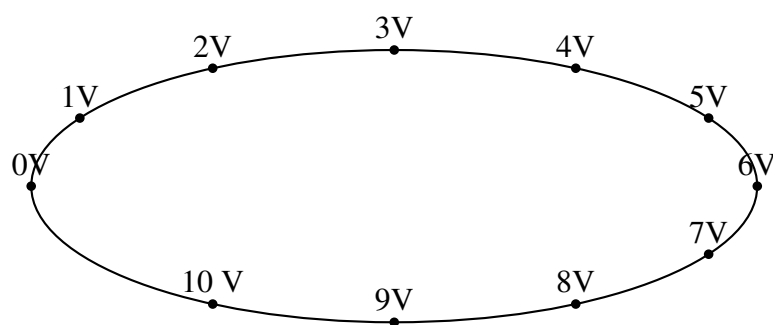
Ao observar o ponto central $x = 1$, onde o potencial é $30V$, notamos que este valor é exatamente a média aritmética dos potenciais nos pontos equidistantes $x = 0$ ($15V$) e $x = 2$ ($45V$):

$$V(1) = \frac{15 + 45}{2} = 30V$$

Esta não é uma coincidência numérica, mas uma propriedade fundamental das funções que satisfazem a Equação de Laplace. Como a solução em uma dimensão é sempre uma reta (equação linear), o valor em qualquer ponto será sempre a média de seus vizinhos imediatos.

É importante destacar que essa característica, embora fácil de visualizar na reta, se expande para duas e três dimensões: na Equação de Laplace, o potencial em um ponto qualquer é sempre o valor médio do potencial ao seu redor (seja em um círculo no 2D ou em uma esfera no 3D). Isso garante que o campo eletrostático, em regiões sem carga, seja sempre "suave", sem apresentar picos ou vales locais de potencial. Dessa propriedade da média, deriva uma das conclusões mais importantes da eletrostática em regiões sem carga: o potencial elétrico não pode assumir valores de máximo ou mínimo locais no interior de um volume.

Se o valor em um ponto é sempre a média dos valores ao seu redor, é impossível que esse ponto seja maior (máximo) ou menor (mínimo) que todos os seus vizinhos simultaneamente. Para que a média se mantenha, se houver um vizinho com valor maior, obrigatoriamente deverá haver outro com valor menor. Portanto, os valores extremos de potencial de um sistema devem estar localizados, necessariamente, nas fronteiras da região, ou seja, nas superfícies dos condutores que delimitam o campo.



Contorno com potenciais prescritos (V)

Figura 21: Distribuição de potencial ao longo do contorno de uma superfície fechada.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como observado na Figura 21, temos um contorno com potenciais prescritos que variam de $0V$ a $10V$. Pela propriedade da média aplicada ao espaço bidimensional, o potencial em qualquer ponto no interior dessa curva será um valor intermediário, estritamente contido no intervalo entre o valor mínimo ($0V$) e o valor máximo ($10V$) encontrados na borda.

Isso implica que, no interior dessa superfície, o potencial será uma função "suave" que redistribui as diferenças de potencial do contorno, garantindo que não existam acúmulos de energia ou "picos" de campo onde não existam cargas reais para gerá-los.

Ao considerarmos uma superfície fechada onde todos os pontos do seu contorno possuem o mesmo potencial constante, como os 10V ilustrados na Figura 22, a propriedade da média nos leva a uma conclusão direta: o potencial em qualquer ponto do interior deve ser, obrigatoriamente, igual ao valor da borda.

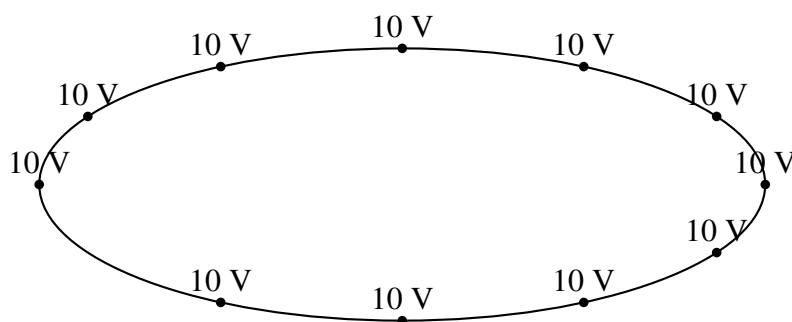


Figura 22: Distribuição de potencial constante ao longo do contorno de uma superfície fechada.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Se tentássemos imaginar um ponto interno com um valor diferente, por exemplo 10,1V ou 9,9V, esse ponto quebraria a regra da média, pois ele passaria a ser um máximo ou um mínimo local, o que a Equação de Laplace proíbe na ausência de cargas. Portanto, se a fronteira é constante, o potencial "dentro" não tem outra escolha a não ser manter-se constante e idêntico à fronteira.

Condutor Esférico em Equilíbrio

Considere um condutor esférico de raio R com uma carga total Q em equilíbrio eletrostático, como ilustrado na Figura 23. Em equilíbrio, as cargas distribuem-se uniformemente na superfície externa, resultando em uma densidade superficial $\sigma = Q/(4\pi R^2)$.

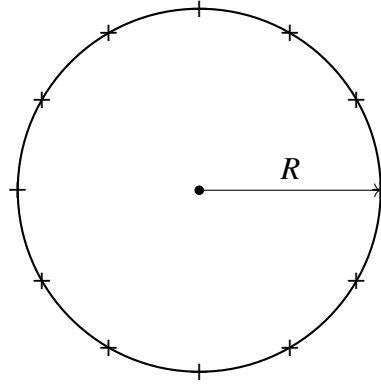


Figura 23: Condutor esférico em equilíbrio eletrostático, com cargas distribuídas na superfície e raio R .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Cálculo do Campo Elétrico ($\vec{E}$): Aplicando a Lei de Gauss para uma superfície gaussiana esférica de raio r :

Interior ($r < R$): Como a carga reside apenas na superfície, a carga interna é nula ($Q_{int} = 0$). Logo, $E \cdot 4\pi r^2 = 0 \implies \vec{E}_{int} = 0$.

Exterior ($r > R$): A carga total envolvida é Q . Assim, $E \cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0 \implies \vec{E}_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{a}_r$.

Na superfície ($r = R$), o campo sofre uma descontinuidade, assumindo o valor $E_{surf} = \sigma/\epsilon_0$.

Cálculo do Potencial Elétrico (V): O potencial em qualquer ponto é a integral de linha do campo vindo do infinito. Para o exterior ($r \geq R$):

$$\begin{aligned} V_{ext} &= - \int_{\infty}^r \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \right) dr' \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r r'^{-2} dr' = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - 0 \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \end{aligned}$$

Na borda da esfera ($r = R$), o potencial vale $V_{borda} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$. Para o interior ($r < R$), a diferença de potencial entre a borda e um ponto interno é:

$$V_{int} - V_{borda} = - \int_R^r \vec{E}_{int} \cdot d\vec{l}$$

Como $\vec{E}_{int} = 0$, a integral é nula, o que implica que $V_{int} = V_{borda}$ para todo o interior.

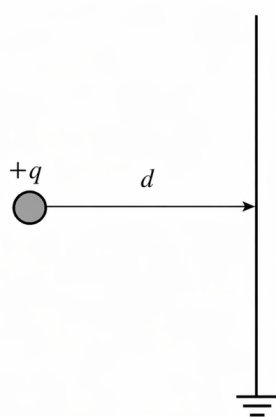
Este resultado corrobora perfeitamente com a propriedade da média da Equação de Laplace discutida anteriormente. Como o potencial na fronteira é constante ($V = kQ/R$) e não

existem cargas no interior da esfera, o potencial em todo o volume interno é "forçado" a manter esse mesmo valor constante. A inexistência de uma variação de potencial ($\nabla V = 0$) garante que o campo elétrico seja nulo, consolidando o conceito de blindagem eletrostática: o interior do condutor está protegido de influências elétricas externas, independentemente da carga depositada em sua superfície.

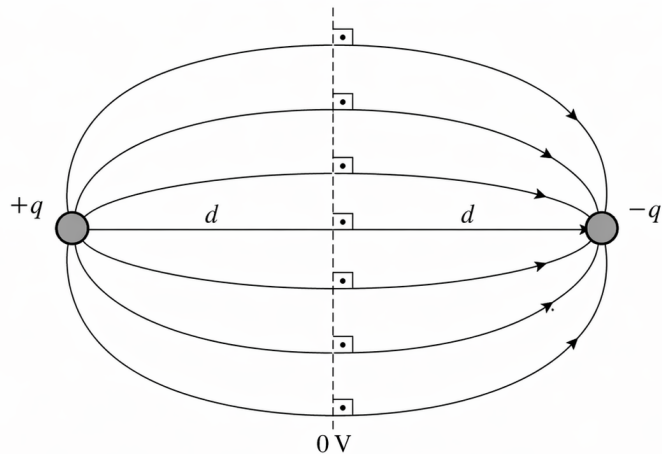
2.3.10 Método das Imagens

O Método das Imagens é uma técnica poderosa fundamentada no **Teorema da Unicidade**. Este teorema garante que, se encontrarmos uma solução para o potencial V que satisfaça a Equação de Poisson na região de interesse e respeite as condições de contorno estabelecidas, essa solução será a única possível, independentemente de como foi obtida.

Como observado na Figura 22 (a), o semi-plano à direita do plano infinito condutor aterrado não possui cargas, sendo regido pela Equação de Laplace ($\nabla^2 V = 0$). Com o contorno em $V = 0$, o potencial em toda essa região à direita é nulo. Já no semi-plano à esquerda, a presença da carga $+q$ define uma região regida pela Equação de Poisson.



(a) Carga $+q$ próxima a um plano condutor aterrado ($V = 0$).



(b) Método das imagens: substituição do plano condutor por uma carga imagem $-q$, com linhas de campo equivalentes. O plano pontilhado é equipotencial com $V = 0$ e o campo elétrico é perpendicular a ele em todos os pontos.

Figura 24: Sistemas equivalentes pelo método das imagens

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para evitar a resolução direta da equação diferencial, aplicamos o método substituindo o plano infinito condutor por uma **carga imagem** $-q$ posicionada simetricamente à distância d atrás do plano, conforme a Figura 22 (b). Como essa nova configuração mantém o plano $z = 0$ com potencial zero, a solução para o campo no semi-espaco original será idêntica à do problema real.

Cálculo do Potencial e Densidade Induzida

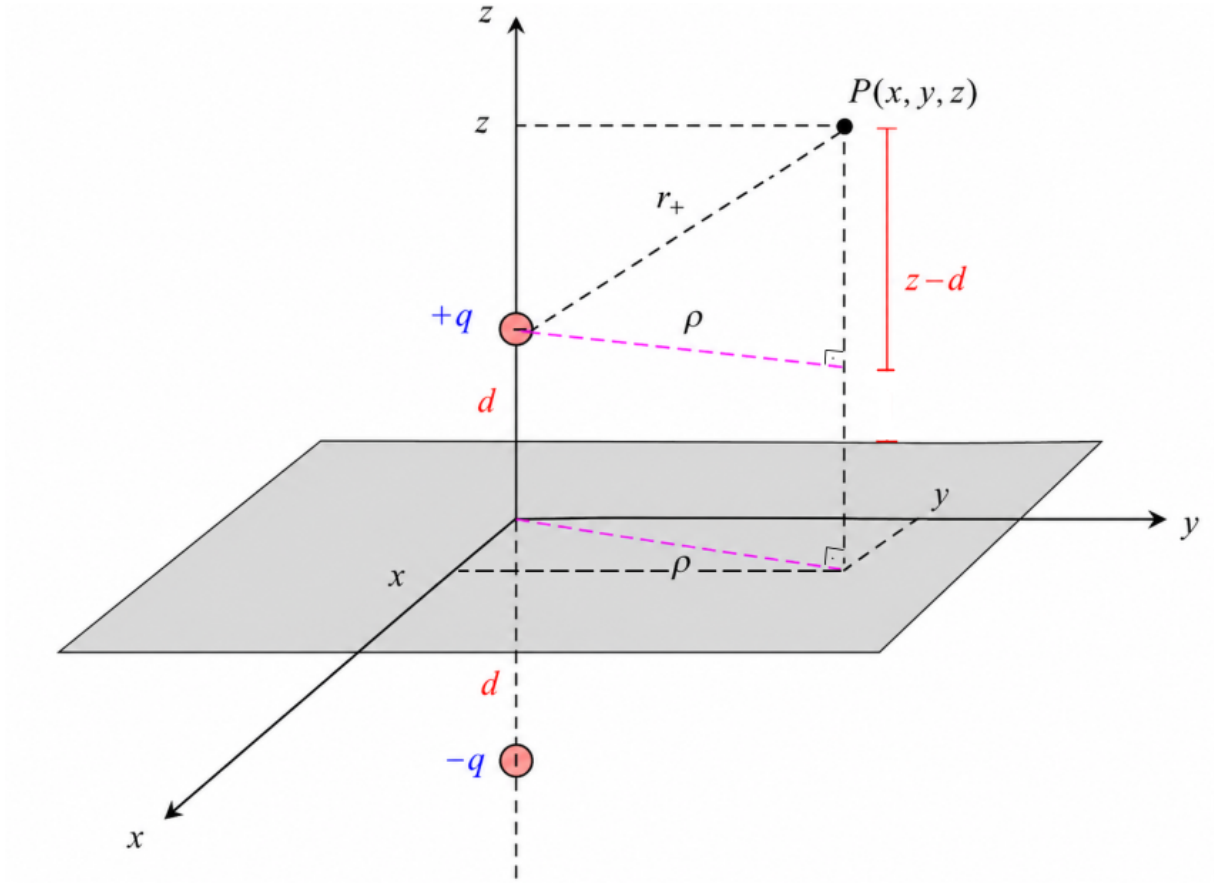


Figura 25: Representação tridimensional do problema apresentado

Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando a representação tridimensional da Figura 23, o potencial em um ponto $P(\rho, z)$ qualquer à esquerda do plano é a soma das contribuições da carga real e da carga imagem:

$$V(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}} \right]$$

Para encontrar a densidade de carga induzida σ no plano infinito, utilizamos a condição de contorno para o campo elétrico normal à superfície condutora ($\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \sigma/\epsilon_0$). Como o campo no interior do condutor (região à direita) é zero, temos $E_z = \sigma/\epsilon_0$. O campo E_z é obtido pelo gradiente negativo do potencial em relação a z , avaliado em $z = 0$:

$$E_z = - \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} \implies \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Derivando a expressão do potencial em relação a z e aplicando $z = 0$:

$$\sigma(\rho) = \frac{-qd}{2\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

Carga Total Induzida

Para encontrar a carga total acumulada no plano (Q_{ind}), integramos a densidade σ sobre toda a área do plano infinito usando coordenadas polares ($dA = \rho \, d\rho \, d\phi$):

$$Q_{ind} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qd}{2\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \rho \, d\rho \, d\phi = -qd \int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \, d\rho$$

Resolvendo a integral, obtemos:

$$Q_{ind} = -q$$

Este resultado confirma fisicamente o método: o plano condutor "gera" uma carga total induzida exatamente igual e oposta à carga real que o influencia.

2.3.11 Campo Elétrico na Matéria

Para compreender o comportamento do campo elétrico quando este interage com meios materiais, faz-se fundamental, primeiramente, estabelecer a distinção clássica entre materiais condutores e isolantes (ou dielétricos), uma vez que a disposição e a mobilidade das cargas internas determinam a resposta macroscópica do sistema.

Os **condutores** são materiais que possuem uma abundância de portadores de carga livres — tipicamente elétrons na banda de condução, no caso dos metais. Quando submetidos a um campo elétrico externo, essas cargas movem-se com extrema facilidade, rearranjando-se na superfície do material até que o campo elétrico resultante em seu interior seja nulo, atingindo o chamado equilíbrio eletrostático.

Por outro lado, os **isolantes**, comumente denominados **dielétricos**, caracterizam-se pela ausência ou escassez de portadores de carga livres. Nesses materiais, os elétrons estão fortemente ligados aos seus respectivos núcleos atômicos ou moleculares. Sob a influência de um campo elétrico externo, não ocorre uma corrente de condução, mas sim um fenômeno conhecido como **polarização**. Esse processo consiste no deslocamento microscópico das cargas positivas (núcleos) na direção do campo e das cargas negativas (nuvem eletrônica) na direção oposta, resultando na criação ou no alinhamento de dipolos elétricos elementares ao longo do material.

2.3.12 O Dipolo Elétrico

A entidade fundamental para descrever a polarização nos dielétricos é o **dipolo elétrico**. Um dipolo elétrico idealizado consiste em um sistema composto por duas cargas pontuais de mesma magnitude q , mas de sinais opostos ($+q$ e $-q$), separadas por uma distância vetorial fixa $\vec{d}$, cujo sentido aponta, por convenção matemática, da carga negativa para a carga positiva.

O parâmetro que quantifica a intensidade e a orientação desse sistema é o **momento de dipolo elétrico** ($\vec{p}$), definido formalmente pela expressão:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Quando uma molécula polar (como a da água) ou uma molécula apolar polarizada por um campo externo é analisada macroscopicamente, o efeito combinado desses momentos de dipolo determina as propriedades elétricas da matéria.

2.3.12.1 Determinação do Campo Elétrico de um Dipolo em um Ponto P

Considere um dipolo elétrico alinhado ao longo do eixo z , centrado na origem do sistema de coordenadas. Desejamos calcular o potencial elétrico gerado por essa configuração em um ponto genérico P , situado a uma distância r consideravelmente maior do que a separação d entre as cargas ($r \gg d$).

A Figura 26 ilustra a geometria do problema no plano bidimensional, destacando os vetores de posição e as componentes envolvidas.

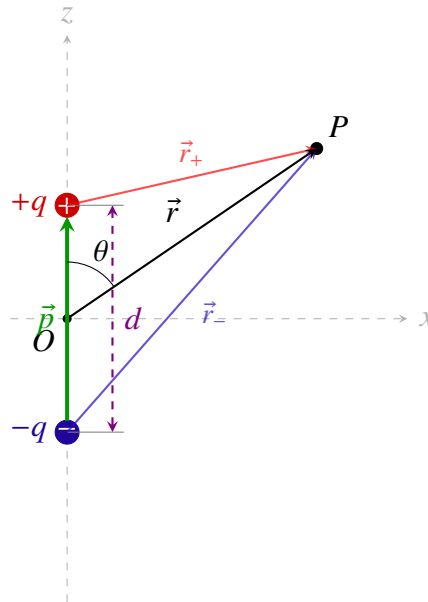


Figura 26: Geometria para o cálculo do potencial elétrico de um dipolo em um ponto genérico P .

Fonte: Elaborado pelo autor.

O potencial elétrico V no ponto P é a superposição linear dos potenciais de cada carga individual:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right)$$

Utilizando a lei dos cossenos e a aproximação para longas distâncias ($r \gg d$), podemos aproximar as distâncias geométricas por:

$$\begin{aligned} r_+ &\approx r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_- &\approx r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

Substituindo estas aproximações no numerador e considerando que no denominador $r_+ r_- \approx r^2$, obtemos a expressão simplificada do potencial dipolar:

$$V(r, \theta) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2.3.13 Polarização e Potencial de uma Distribuição de Dipolos

Após estabelecer o comportamento eletrostático de um dipolo elétrico isolado no espaço, torna-se necessário estender essa formulação para cenários em que o campo elétrico interage com um meio material macroscópico. Um dielétrico real contém uma densidade imensa de átomos ou moléculas que atuam como dipolos microscópicos elementares.

Cada um desses dipolos individuais possui um momento de dipolo definido por:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Para descrever o estado elétrico global desse meio material, introduz-se a grandeza vetorial macroscópica denominada **Vetor de Polarização** ($\vec{P}$), que representa a densidade volumétrica de momento de dipolo elétrico, expressa formalmente por:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a polarização $\vec{P}$ é medida em Coulomb por metro quadrado (C/m²).

2.3.13.1 Potencial de um Meio Polarizado

Considere um volume V' de material dielétrico submetido a um processo de polarização. Um elemento infinitesimal de volume dv' conterá um momento de dipolo elementar dado por $d\vec{p} = \vec{P} dv'$. O potencial eletrostático total V gerado por toda a distribuição contínua de dipolos em um ponto de observação externo P é obtido integrando-se as contribuições de cada elemento de volume sobre todo o domínio ocupado pela matéria:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \hat{a}_r}{r^2} dv'$$

onde $r = |\vec{R} - \vec{R}'|$ descreve a distância geométrica existente entre o elemento de volume fonte (na posição $\vec{R}'$) e o ponto onde se calcula o potencial (na posição $\vec{R}$).

Uma identidade matemática vetorial conveniente permite reescrever o termo geométrico interno do integrando. Sabendo que o gradiente da função recíproca da distância em relação às coordenadas da fonte é dado por:

$$\nabla' \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{a}_r}{r^2}$$

Pode-se reescrever o potencial elétrico original na seguinte forma integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) dv'$$

2.3.13.2 Desenvolvimento e a Identidade Fundamental

Para transformar a equação integral do potencial em termos fisicamente interpretáveis, utiliza-se a identidade do cálculo vetorial que rege o divergente do produto de um escalar por um vetor. Conforme detalhado na seção 2.8.7 durante o estudo da energia eletrostática, esse operador expande-se de maneira análoga à regra do produto da derivada convencional.

Aplicando a identidade $\nabla \cdot (f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \vec{A})$ em relação às coordenadas da fonte (∇'), e definindo as substituições estruturais $f = \frac{1}{r}$ e $\vec{A} = \vec{P}$, isola-se o termo de interesse do integrando:

$$\vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P})$$

Substituindo essa expansão diretamente na integral do potencial, o termo original desmembra-se na soma de duas novas integrais lineares:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dv' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{r} dv'$$

A primeira integral da equação pode ser convertida de uma integral de volume para uma integral de superfície fechada por meio da aplicação do Teorema da Divergência, seguindo o mesmo procedimento matemático consolidado anteriormente:

$$\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dv' = \oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}'}{r}$$

Desta maneira, o potencial eletrostático exato de qualquer meio polarizado passa a ser descrito pela expressão combinada:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{r} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{(-\nabla' \cdot \vec{P})}{r} dv'$$

2.3.13.3 O Surgimento das Cargas Ligadas

A estrutura matemática obtida possui equivalência direta com a equação geral do potencial gerado por distribuições macroscópicas clássicas de cargas elétricas (superficiais e volumétricas). Por analogia direta com o modelo clássico de Coulomb:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S'} \frac{\sigma_b}{r} dS' + \int_{V'} \frac{\rho_b}{r} dv' \right]$$

Podem-se identificar duas novas fontes efetivas de campo, denominadas **cargas ligadas** (ou cargas de polarização):

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Onde σ_b representa a densidade superficial de carga ligada e ρ_b a densidade volumétrica de carga ligada. O termo "ligada" refere-se ao fato de que essas cargas não possuem liberdade de condução pelo material; elas permanecem vinculadas às estruturas atômicas locais, surgindo apenas devido ao deslocamento microscópico induzido pela polarização.

Fisicamente, a densidade superficial $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ quantifica o fluxo do vetor de polarização que efetivamente atravessa a fronteira geométrica exterior do material. Se as linhas do vetor $\vec{P}$ apontam para fora da superfície ($\vec{P} \cdot \hat{n} > 0$), há o acúmulo local de cargas ligadas positivas ($\sigma_b > 0$). Inversamente, se as linhas convergem para o interior do volume ($\vec{P} \cdot \hat{n} < 0$), verifica-se a manifestação de cargas superficiais negativas ($\sigma_b < 0$).

Por sua vez, a densidade volumétrica $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ atua como uma medida de divergência ou do acúmulo interno de carga resultante de distorções espaciais na polarização. Caso o meio material apresente uma polarização estritamente uniforme ($\vec{P} = \text{constante}$), o divergente do vetor será identicamente nulo ($\nabla \cdot \vec{P} = 0$), implicando na completa ausência de cargas ligadas líquidas no interior do volume ($\rho_b = 0$).

2.3.13.4 Exemplo Prático: A Cuba Polarizada Uniformemente

Para ilustrar de forma concreta a física das cargas ligadas e a aplicação geométrica das equações deduzidas, considere o exemplo de um bloco dielétrico em formato de cuba retangular perfeitamente homogênea. Internamente, o arranjo ordenado de seus constituintes microscópicos alinha-se uniformemente de modo a gerar um vetor de polarização constante e direcionado ao longo do eixo horizontal, denotado por $\vec{P} = P\hat{x}$, conforme esquematizado na geometria elementar:

$$\begin{array}{cccc} (-+) & (-+) & (-+) & (-+) \\ (-+) & (-+) & (-+) & (-+) \\ (-+) & (-+) & (-+) & (-+) \end{array}$$

Como o vetor momento de dipolo aponta convencionalmente da carga negativa para a carga positiva, o vetor de polarização macroscópica aponta estritamente para a direita. Para determinar a distribuição espacial de cargas ligadas que simula esse meio material, analisa-se primeiramente a casca geométrica completa da superfície fechada S que envolve a cuba (composta por suas seis faces externas).

Na face lateral esquerda do bloco, o vetor unitário normal à superfície aponta no sentido oposto ao eixo de coordenadas ($\hat{n} = -\hat{x}$). Portanto, a densidade superficial resulta em:

$$\sigma_b = (P\hat{x}) \cdot (-\hat{x}) = -P$$

Na face lateral direita, o vetor unitário normal aponta no mesmo sentido do eixo ($\hat{n} = \hat{x}$), fornecendo:

$$\sigma_b = (P\hat{x}) \cdot (\hat{x}) = +P$$

Nas quatro faces restantes que limitam o volume da cuba (superior, inferior, frontal e traseira), os respectivos vetores normais são ortogonais ao eixo x (direções $\pm\hat{y}$ e $\pm\hat{z}$). Consequentemente, o produto escalar anula-se de maneira idêntica, resultando em $\sigma_b = 0$.

Para o cálculo interno do volume, como a polarização $\vec{P} = P\hat{x}$ é espacialmente uniforme, suas derivadas parciais espaciais são nulas. A aplicação do operador divergente resulta em:

$$\rho_b = -\nabla \cdot (P\hat{x}) = 0$$

Este resultado demonstra de forma analítica que não há acúmulo líquido de carga no interior do dielétrico, ocorrendo apenas o surgimento de duas camadas de sinais opostos em suas extremidades. Se calcularmos a carga líquida total ligada (Q_b) integrando as densidades sobre a superfície, observa-se que:

$$Q_b = \oint_S \sigma_b dS = \int_{\text{direita}} (+P) dS + \int_{\text{esquerda}} (-P) dS = 0$$

Esse comportamento reflete com exatidão a física microscópica do sistema: os dipolos elétricos moleculares não criam cargas líquidas reais a partir do nada; eles promovem estritamente um processo de separação e deslocamento espacial de cargas pré-existentes.

2.3.13.5 A Grande Ponte Conceitual da Eletrostática

O desenvolvimento matemático estabelecido nesta subseção condensa a ideia central de todo o estudo dos campos elétricos na matéria. A construção teórica partiu de uma descrição estritamente microscópica formulada em termos de momentos de dipolo individuais ($\vec{P}$) e convergiu para uma descrição macroscópica clássica baseada em densidades equivalentes de cargas elétricas (ρ_b e σ_b).

A relevância prática dessa transição é profunda. Uma vez determinadas as funções de distribuição de cargas ligadas superficiais e volumétricas associadas à polarização do dielétrico, pode-se, para fins de cálculo prático, desconsiderar a complexidade da estrutura interna dos dipolos. O meio material passa a ser tratado como uma distribuição convencional de cargas no vácuo, permitindo a aplicação direta de todo o arcabouço matemático e físico previamente consolidado na eletrostática clássica:

$$V, \quad \vec{E}, \quad \nabla \cdot \vec{E}, \quad \text{Lei de Gauss, Equação de Poisson e Equação de Laplace}$$

Esta equivalência estabelece uma ponte conceitual unificada, reduzindo o problema complexo da interação eletrostática em meios materiais ao cálculo analítico de campos gerados por distribuições equivalentes de carga.

2.3.14 Dielétricos Lineares e o Vetor Deslocamento Elétrico

A formulação eletrostática desenvolvida até o momento estabeleceu uma base conceitual partindo de entidades microscópicas (os dipolos) para determinar o surgimento de distribuições macroscópicas equivalentes de carga (as cargas ligadas ρ_b e σ_b). Contudo, em problemas práticos de engenharia e física experimental, lidar diretamente com o monitoramento dessas cargas induzidas torna-se uma tarefa analiticamente complexa.

Para contornar essa dificuldade e viabilizar a resolução de problemas reais, a teoria eletromagnética introduz o **Vetor Deslocamento Elétrico** ($\vec{D}$). Essa grandeza não decorre da descoberta de um novo fenômeno físico, mas sim de um refinamento matemático projetado para isolar a influência das cargas ligadas e simplificar a aplicação da Lei de Gauss em meios materiais.

2.3.14.1 A Origem Matemática do Vetor Deslocamento

Para compreender a necessidade analítica do vetor $\vec{D}$, inicia-se a análise pela forma diferencial da Lei de Gauss usual no vácuo, a qual permanece válida no interior de qualquer meio material, desde que computadas todas as fontes de campo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{total}}}{\epsilon_0}$$

Nesse contexto, a densidade volumétrica total de carga (ρ_{total}) deve ser explicitamente desmembrada como a superposição das densidades de cargas livres (ρ_f , oriundas de portadores de condução ou inseridas externamente no sistema) e de cargas ligadas (ρ_b , decorrentes da polarização atômica do material):

$$\rho_{\text{total}} = \rho_f + \rho_b$$

Substituindo essa decomposição na Lei de Gauss fundamental, obtém-se:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0}$$

Como demonstrado anteriormente através do potencial dipolar, a densidade volumétrica de carga ligada associa-se diretamente ao comportamento espacial do vetor de polarização por

meio da relação $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$. Ao realizar essa substituição no integrando, a expressão assume a forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade pela permissividade elétrica do vácuo (ϵ_0), isolam-se os termos operados pelo divergente:

$$\epsilon_0(\nabla \cdot \vec{E}) = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\epsilon_0(\nabla \cdot \vec{E}) + \nabla \cdot \vec{P} = \rho_f$$

Aproveitando a propriedade de linearidade do operador diferencial linear, o divergente pode ser colocado em evidência através da identidade $\nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B})$:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

Nesse estágio do desenvolvimento matemático, observa-se o surgimento recorrente da combinação linear ($\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$). Com o propósito de simplificar a notação e consolidar essa resposta do meio em uma única variável constitutiva, define-se formalmente o Vetor Deslocamento Elétrico ($\vec{D}$) como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Substituindo essa definição diretamente na expressão anterior, consolida-se a Lei de Gauss para o vetor deslocamento em sua forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

A relevância física desse resultado reside em uma comparação direta de escopo: enquanto o campo elétrico $\vec{E}$ "enxerga" a totalidade das cargas presentes no espaço ($\rho_f + \rho_b$), o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}$ responde exclusivamente à presença de cargas livres (ρ_f).

2.3.14.2 Formulação Integral e Aplicação Prática

Para fins de cálculo prático, a transição para a forma macroscópica integral realiza-se aplicando-se o Teorema da Divergência sobre um volume arbitrário V delimitado por uma superfície fechada S :

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{D}) dv = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Uma vez que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$, a integral volumétrica da densidade de cargas livres resulta na carga líquida livre total (Q_f) contida no interior do domínio Gaussiano:

$$\int_V \rho_f dv = Q_f$$

Dessa forma, estabelece-se a Lei de Gauss para o vetor deslocamento na forma integral:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f$$

A utilidade analítica dessa formulação é imensa. Considere, como exemplo ilustrativo, uma esfera condutora carregada com uma carga livre Q imersa em um meio dielétrico espesso. Em uma abordagem baseada estritamente no campo $\vec{E}$, o cálculo demandaria determinar previamente o acúmulo de carga ligada negativa na interface interna do material e de carga ligada positiva na extremidade externa.

Por meio do vetor $\vec{D}$, contudo, a imposição da simetria esférica sobre a superfície Gaussiana reduz o problema à única fonte controlável experimentalmente:

$$D_r(4\pi r^2) = Q_f \implies D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

O deslocamento elétrico é determinado imediatamente, de forma independente do rearranjo e da geometria das cargas ligadas geradas pelo dielétrico.

2.3.14.3 Dielétricos Lineares e Relações Constitutivas

A simplificação introduzida pelo vetor $\vec{D}$ atinge seu potencial máximo quando aplicada à classe dos **dielétricos lineares**. Um meio material é classificado como linear quando o vetor de polarização macroscópica induzida manifesta uma proporcionalidade direta com a intensidade do campo elétrico local:

$$\vec{P} \propto \vec{E}$$

Isso implica que qualquer acréscimo proporcional no campo elétrico resulta em um aumento idêntico na magnitude da polarização dos dipolos. Essa relação é formalizada introduzindo-se uma constante adimensional denominada **susceptibilidade elétrica** (χ_e):

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

A susceptibilidade elétrica χ_e atua como uma medida quantitativa da facilidade com que um determinado meio material se polariza sob a ação de um estímulo externo. Para o vácuo absoluto, onde não há matéria para sofrer distorção espacial de cargas, tem-se $\chi_e = 0$. Para materiais dielétricos reais e homogêneos, verifica-se $\chi_e > 0$. Quanto maior for o valor desse parâmetro, maior será a densidade de dipolos induzidos e, conseqüentemente, mais acentuada será a atenuação do campo elétrico resultante no interior do material.

Para unificar essas definições, substitui-se a equação linear da polarização diretamente na definição geral do vetor deslocamento:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

O agrupamento constante $(1 + \chi_e)$ define uma nova propriedade adimensional do meio, denominada **permissividade relativa** (ϵ_r), também referida na literatura clássica como constante dielétrica:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

A multiplicação da permissividade relativa pela constante fundamental do vácuo consolida a chamada **permissividade absoluta** (ϵ) do meio material:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

A equação constitutiva fundamental que rege o comportamento de um dielétrico linear, homogêneo e isotrópico assume a expressão linear simplificada:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Fisicamente, essa cadeia de relações evidencia a mecânica de operação dos dielétricos. Enquanto no vácuo o acoplamento entre os vetores é dado por $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, no meio material ele passa a ser ditado por $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Como $\epsilon > \epsilon_0$ para qualquer isolante real, observa-se que, para uma mesma configuração fixa de cargas livres (o que mantém o vetor $\vec{D}$ inalterado), a magnitude do campo elétrico $\vec{E}$ resultante será drasticamente reduzida pela presença da matéria.

2.3.14.4 Problema de Aplicação: Esfera Condutora com Casca Dielétrica

Considere uma esfera condutora ideal de raio a , com uma carga livre total Q distribuída em sua superfície. A esfera está envolvida por uma casca dielétrica linear e homogênea de raio interno a e raio externo b , caracterizada por uma permissividade absoluta ϵ . A região externa à casca ($r > b$) é constituída pelo vácuo.

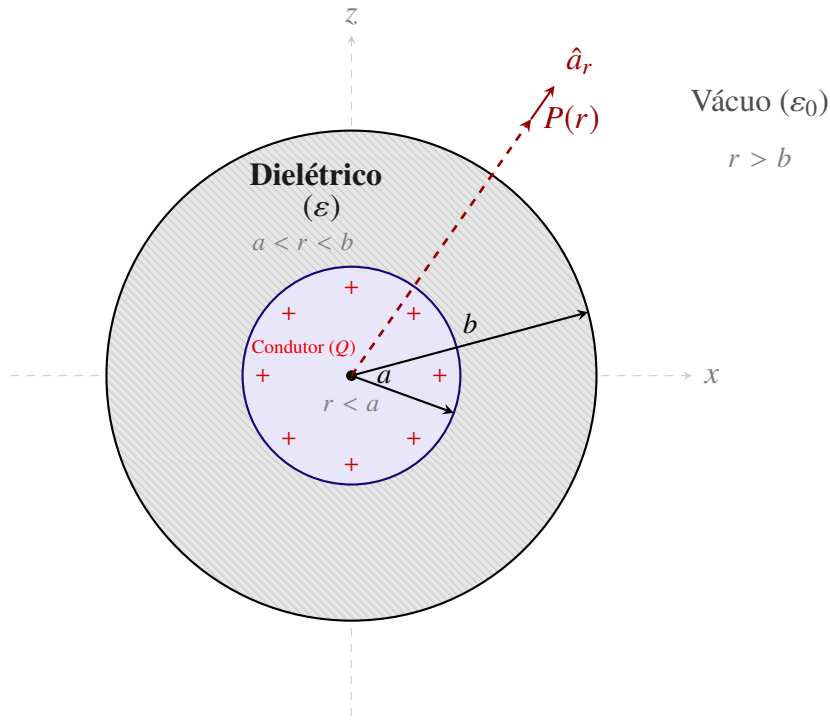


Figura 27: Representação geométrica do problema de fronteira: núcleo condutor esférico com carga Q envolvido por uma casca dielétrica de permissividade absoluta ε .

Fonte: Elaborado pelo autor.

1. Determinação do Vetor Deslocamento Elétrico ($\vec{D}$)

A única fonte de cargas livres no sistema é a carga Q localizada no condutor central. Aplicando-se a Lei de Gauss para o vetor deslocamento sobre uma superfície esférica Gaussiana de raio $r > a$, e aproveitando a simetria radial dada por $\vec{D} = D_r(r)\hat{a}_r$, obtém-se:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f \implies D_r(4\pi r^2) = Q$$

Dessa forma, o vetor deslocamento elétrico para qualquer ponto além do núcleo condutor é expresso por:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r \quad (r > a)$$

2. Determinação do Campo Elétrico ($\vec{E}$)

As propriedades do campo elétrico variam de acordo com as três regiões distintas do espaço:

- No interior da esfera condutora ($r < a$), o campo elétrico é nulo devido ao equilíbrio eletrostático:

$$\vec{E} = 0$$

- No interior da casca dielétrica ($a < r < b$), utiliza-se a relação constitutiva linear $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \hat{a}_r$$

- No espaço externo ($r > b$), o meio material cessa e o acoplamento volta a ser regido pela permissividade do vácuo ($\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$):

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{a}_r$$

3. Vetor de Polarização ($\vec{P}$)

A partir da definição geral do deslocamento elétrico, isola-se o vetor de polarização macroscópica como $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$. Substituindo as expressões correspondentes para a região ocupada pelo dielétrico ($a < r < b$), obtém-se:

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r - \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \hat{a}_r \right) = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \hat{a}_r$$

4. Cálculo das Densidades de Cargas Ligadas

A densidade volumétrica de carga ligada (ρ_b) no interior do isolante é avaliada aplicando-se o operador divergente em coordenadas esféricas sobre o vetor $\vec{P}$:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot \left[\frac{Q}{4\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \frac{\hat{a}_r}{r^2} \right]$$

Sabendo do cálculo vetorial que o divergente do termo $\frac{\hat{a}_r}{r^2}$ é nulo para qualquer ponto fora da origem ($r \neq 0$), e dado que o domínio do dielétrico restringe-se ao intervalo $a < r < b$, conclui-se que:

$$\rho_b = 0$$

Para as cargas ligadas superficiais ($\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$), deve-se avaliar a orientação dos vetores normais unitários às superfícies da casca material:

- Na interface interna ($r = a$), o vetor normal ao dielétrico aponta para o interior da esfera ($\hat{n} = -\hat{a}_r$):

$$\sigma_b(a) = \left[\frac{Q}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \hat{a}_r \right] \cdot (-\hat{a}_r) = -\frac{Q}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)$$

- Na interface externa ($r = b$), o vetor normal aponta para fora do sistema ($\hat{n} = \hat{a}_r$):

$$\sigma_b(b) = \left[\frac{Q}{4\pi b^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \hat{a}_r \right] \cdot (\hat{a}_r) = \frac{Q}{4\pi b^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)$$

5. Quantificação das Cargas Totais

As cargas superficiais ligadas totais acumuladas em cada uma das fronteiras são calculadas multiplicando-se as densidades pelas respectivas áreas geométricas das cascas esféricas:

$$Q_b(a) = \sigma_b(a) \cdot (4\pi a^2) = -Q \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

$$Q_b(b) = \sigma_b(b) \cdot (4\pi b^2) = Q \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

A soma algébrica das cargas de polarização resulta em:

$$Q_b^{\text{total}} = Q_b(a) + Q_b(b) = 0$$

Este resultado valida consistentemente a conservação de cargas, uma vez que o processo de polarização linear apenas desloca os centros de carga da estrutura atômica, sem criar carga líquida no dielétrico. Em contrapartida, a densidade superficial de carga livre (σ_f) localizada estritamente na superfície do condutor central mantém-se igual a:

$$\sigma_f = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

6. Potencial Eletrostático e Capacitância

Adotando-se o referencial nulo no infinito ($V(\infty) = 0$), o potencial elétrico na superfície do condutor central $V(a)$ é determinado integrando-se o campo elétrico ao longo do caminho radial vindo do infinito:

$$\begin{aligned} V(a) &= - \int_{\infty}^b \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E}_{\text{diel}} \cdot d\vec{r} \\ V(a) &= \int_b^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr \\ V(a) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Agrupando os termos, estabelece-se o potencial da esfera condutora:

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\varepsilon_0 b} \right]$$

Como o interior de um condutor em equilíbrio eletrostático constitui uma região equipotencial, o valor obtido em $V(a)$ estende-se inalterado para qualquer ponto interno ($r \leq a$), incluindo a própria origem do sistema ($V(0) = V(a)$).

Por fim, a capacitância equivalente (C) desta configuração geométrica material é obtida diretamente pela razão entre a carga livre armazenada e a diferença de potencial gerada:

$$C = \frac{Q}{V(a)} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\varepsilon_0 b}}$$

Este problema atua como uma síntese prática para o tema, explicitando como a formulação do vetor deslocamento $\vec{D}$ simplifica a resolução de problemas eletrostáticos em meios materiais ao contornar o cálculo prévio das cargas ligadas superficiais e volumétricas.

2.4 Introdução à Magnetostática

Assim como no capítulo anterior, recomenda-se ao leitor consultar a obra de Griffiths ([GRIFFITHS, 2011](#)) para um estudo mais aprofundado dos conceitos apresentados. Além disso, as videoaulas disponibilizadas pelo canal *Eletromagnetismo UFF* ([Eletromagnetismo UFF, 2026](#)) constituem um excelente material complementar para o acompanhamento deste capítulo. A magnetostática é o ramo do eletromagnetismo que estuda campos magnéticos produzidos por cargas elétricas em movimento estacionário, isto é, situações nas quais as distribuições de corrente e os campos gerados não variam com o tempo. Seu princípio fundamental é que cargas elétricas em movimento produzem campos magnéticos no espaço ao seu redor, os quais podem exercer forças sobre outras cargas em movimento.

Em analogia à eletrostática, onde cargas elétricas em repouso produzem campos elétricos, a magnetostática busca descrever os campos gerados por correntes constantes e as forças associadas a essas correntes.

A corrente elétrica é definida como a taxa temporal de passagem de carga elétrica através de uma superfície. Se uma quantidade diferencial de carga dq atravessa uma seção transversal durante um intervalo de tempo dt , a corrente é dada por

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

A unidade de corrente elétrica no Sistema Internacional é o ampère (A), definido como

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}.$$

Força Magnética Sobre uma Partícula

Considere uma carga puntiforme q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ em uma região onde existe um campo magnético $\vec{B}$. Experimentalmente verifica-se que essa carga fica sujeita à força magnética

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Essa força é sempre perpendicular tanto à velocidade da partícula quanto ao campo magnético, característica expressa pelo produto vetorial.

2.4.1 Correntes Lineares, Superficiais e Volumétricas

As fontes de campo magnético podem assumir diferentes formas dependendo da maneira como a carga elétrica está distribuída no espaço. Quando as cargas estão confinadas a uma linha, utiliza-se a corrente elétrica I ; quando estão distribuídas sobre uma superfície, utiliza-se a densidade superficial de corrente $\vec{K}$; e quando ocupam uma região tridimensional, utiliza-se a densidade volumétrica de corrente $\vec{J}$.

Embora as descrições sejam diferentes, todas representam o mesmo fenômeno físico: cargas elétricas em movimento produzindo campos magnéticos.

Corrente Linear

Considere uma distribuição linear de cargas caracterizada pela densidade linear de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dl}.$$

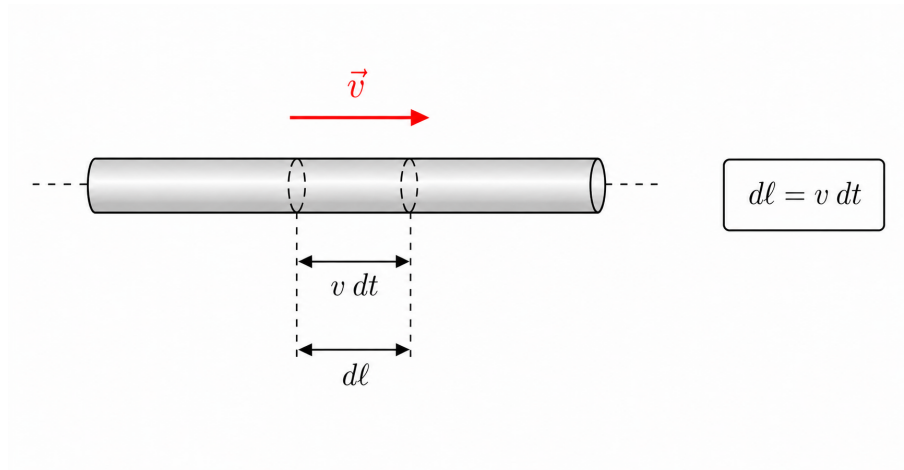


Figura 28: Corrente elétrica fluindo através de um fio retilíneo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Durante um intervalo de tempo dt , os portadores de carga percorrem uma distância

$$dl = v dt.$$

A quantidade de carga transportada nesse intervalo é

$$dq = \lambda dl.$$

Substituindo $dl = v dt$,

$$dq = \lambda v dt.$$

Dividindo ambos os lados por dt ,

$$I = \frac{dq}{dt} = \lambda v.$$

Portanto,

$$I = \lambda v$$

Para determinar a força magnética exercida sobre o fio, partimos da força magnética sobre uma carga puntiforme,

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B}.$$

Observa-se que a quantidade fundamental que aparece na expressão é $dq \vec{v}$. Utilizando

$$dq = \lambda dl,$$

obtemos

$$dq \vec{v} = \lambda dl \vec{v}.$$

Como $\lambda v = I$,

$$dq \vec{v} = I d\vec{l}.$$

Substituindo na expressão da força,

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Integrando ao longo de todo o condutor,

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Corrente Superficial

Considere agora uma distribuição de carga confinada a uma superfície. Define-se a densidade superficial de carga por

$$\sigma = \frac{dq}{dA}.$$

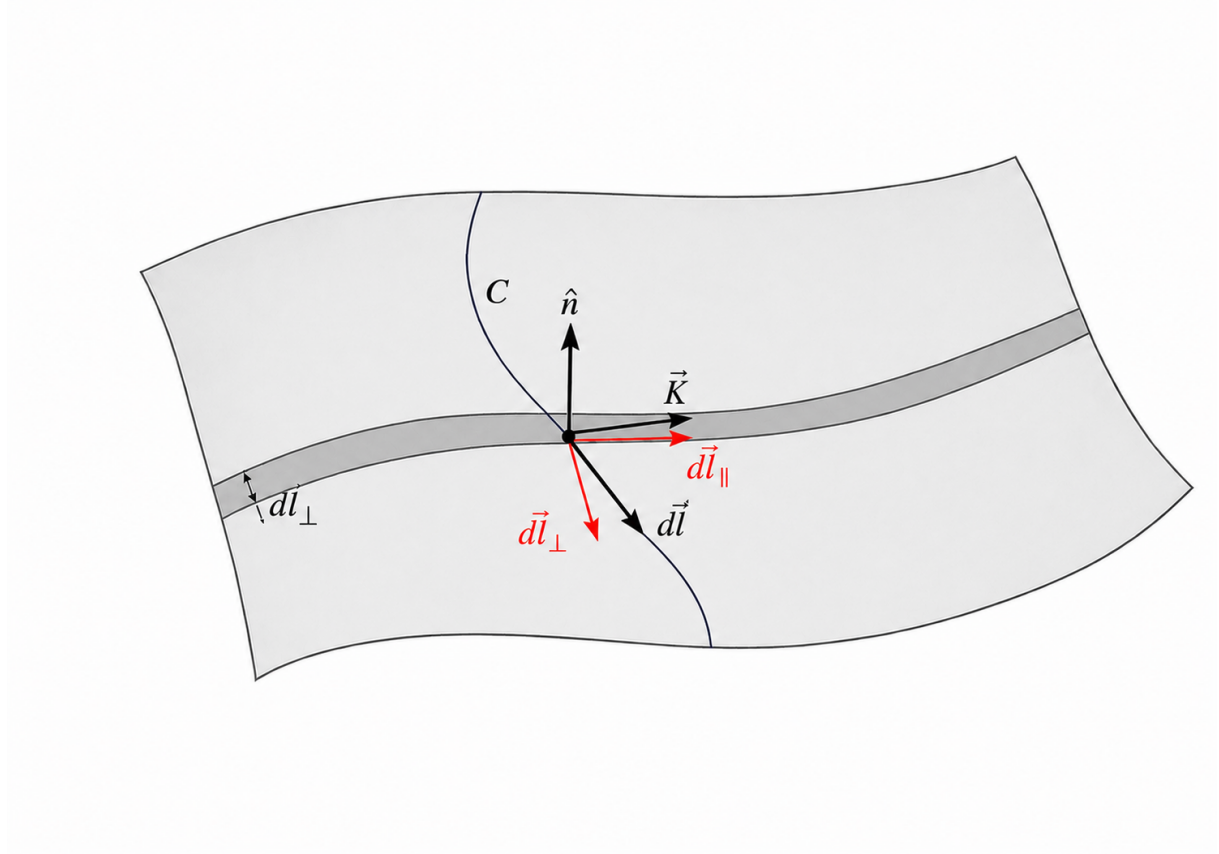


Figura 29: Corrente elétrica fluindo através de uma superfície.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela construção geométrica ilustrada na figura,

$$dA = dl_{\perp} dl_{\parallel}.$$

Como os portadores se deslocam paralelamente à corrente,

$$dl_{\parallel} = v dt.$$

Logo,

$$dA = dl_{\perp} v dt.$$

Substituindo na definição de densidade superficial,

$$dq = \sigma dA = \sigma dl_{\perp} v dt.$$

Agrupando os termos σv , define-se a densidade superficial de corrente

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}.$$

Assim,

$$dq = K dl_{\perp} dt.$$

Dividindo ambos os lados por dt ,

$$dI = K dl_{\perp}.$$

Para calcular a corrente total é necessário somar todas as contribuições diferenciais. Para isso escolhe-se uma curva arbitrária C que atravesse completamente a região por onde a corrente flui.

A componente perpendicular $dl_{\perp}$ pode ser obtida projetando o elemento diferencial da curva $d\vec{l}$ na direção perpendicular à corrente. Essa direção é fornecida pelo vetor $\hat{K} \times \hat{n}$, onde $\hat{n}$ é o versor normal à superfície.

Assim,

$$dl_{\perp} = d\vec{l} \cdot (\hat{K} \times \hat{n}).$$

Substituindo em dI ,

$$dI = (\vec{K} \times \hat{n}) \cdot d\vec{l}.$$

Integrando ao longo da curva C ,

$$I = \int_C (\vec{K} \times \hat{n}) \cdot d\vec{l}.$$

Utilizando a identidade do produto misto,

$$I = \int_C \vec{K} \cdot (\hat{n} \times d\vec{l})$$

Para determinar a força magnética sobre a distribuição superficial, voltamos à expressão

$$dq = K dl_{\perp} dt.$$

Multiplicando pela velocidade,

$$dq \vec{v} = K dl_{\perp} (v dt).$$

Como

$$v dt = dl_{\parallel},$$

segue que

$$dq \vec{v} = K dl_{\perp} dl_{\parallel}.$$

Mas

$$dl_{\perp} dl_{\parallel} = dA.$$

Logo,

$$dq \vec{v} = \vec{K} dA.$$

Substituindo na força magnética,

$$d\vec{F} = (\vec{K} \times \vec{B}) dA.$$

Integrando sobre toda a superfície,

$$\vec{F} = \int_S (\vec{K} \times \vec{B}) dA$$

Corrente Volumétrica

Quando as cargas ocupam uma região tridimensional do espaço, define-se a densidade volumétrica de carga por

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

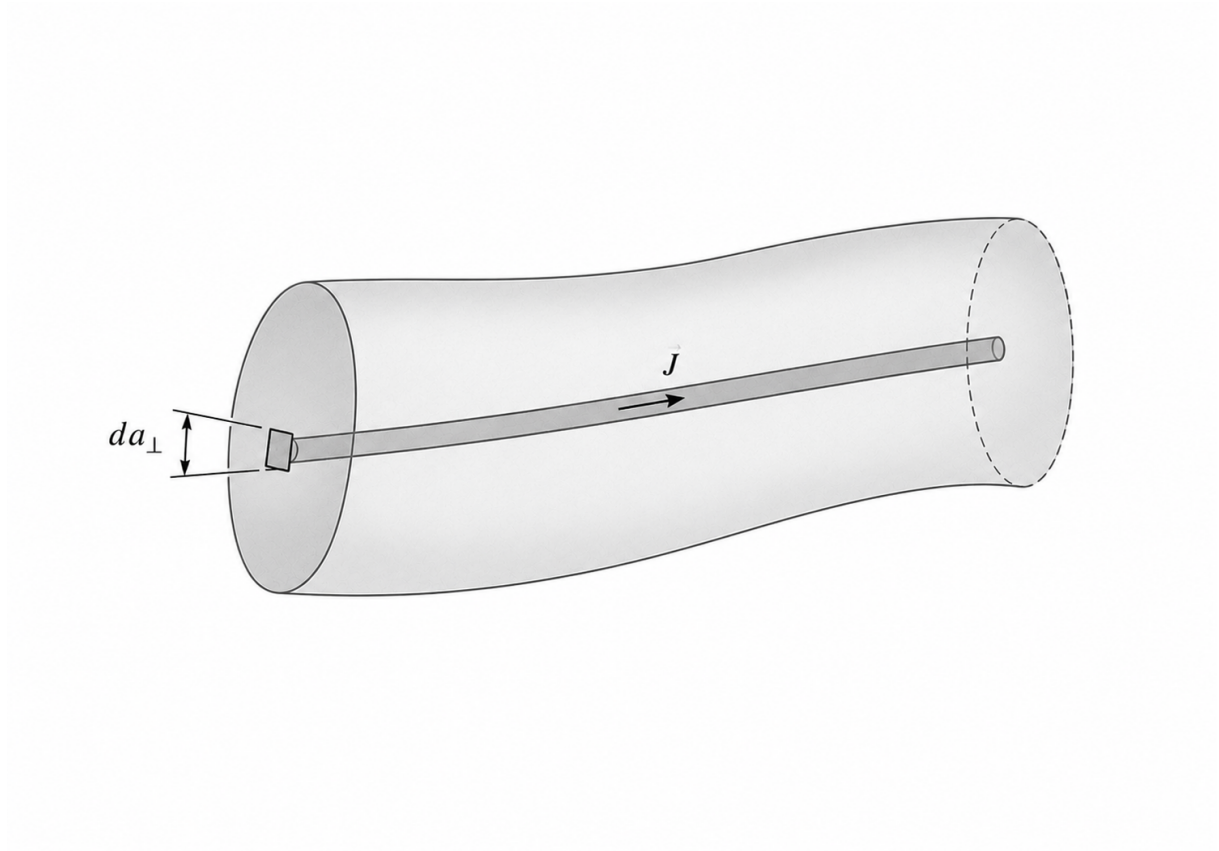


Figura 30: Corrente elétrica fluindo através de um volume.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela construção geométrica mostrada na figura,

$$dV = dA_{\perp} dl.$$

Como

$$dl = v dt,$$

segue que

$$dV = dA_{\perp} v dt.$$

Substituindo na definição de densidade volumétrica,

$$dq = \rho dV = \rho dA_{\perp} v dt.$$

Agrupando os termos ρv , define-se a densidade volumétrica de corrente

$$\vec{J} = \rho \vec{v}.$$

Assim,

$$dq = J dA_{\perp} dt.$$

Dividindo por dt ,

$$dI = J dA_{\perp}.$$

Como apenas a componente perpendicular da área contribui para a corrente, a expressão geral é escrita na forma de fluxo,

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Integrando sobre uma superfície transversal completa,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Para determinar a força magnética correspondente, voltamos à expressão

$$dq = J dA_{\perp} dt.$$

Multiplicando pela velocidade,

$$dq \vec{v} = J dA_{\perp} (v dt).$$

Como

$$dA_{\perp}(v dt) = dV,$$

segue que

$$dq \vec{v} = \vec{J} dV.$$

Substituindo na expressão da força magnética,

$$d\vec{F} = (\vec{J} \times \vec{B}) dV.$$

Integrando sobre todo o volume,

$$\vec{F} = \int_V (\vec{J} \times \vec{B}) dV$$

Síntese

As descrições linear, superficial e volumétrica representam diferentes maneiras de descrever a mesma fonte física de campo magnético. Em cada caso, o termo fundamental presente na força magnética é

$$dq \vec{v}.$$

Dependendo da distribuição de carga considerada, esse termo pode ser escrito como

$$dq \vec{v} = I d\vec{l} = \vec{K} dA = \vec{J} dV$$

A Tabela 6 resume os principais resultados obtidos.

Tabela 6: Comparação entre as diferentes descrições de corrente.

Distribuição	Corrente	Elemento de Corrente	Força Magnética
Linear	$I = \lambda v$	$I d\vec{l}$	$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$
Superficial	$\vec{K} = \sigma \vec{v}$	$\vec{K} dA$	$\vec{F} = \int_S (\vec{K} \times \vec{B}) dA$
Volumétrica	$\vec{J} = \rho \vec{v}$	$\vec{J} dV$	$\vec{F} = \int_V (\vec{J} \times \vec{B}) dV$

Carga Puntiforme como uma Distribuição

As densidades de carga introduzidas anteriormente permitem descrever distribuições contínuas de carga. Em particular, a densidade volumétrica de carga satisfaz a relação

$$q = \int_V \rho dV,$$

ou seja, a carga total contida em um volume é obtida integrando-se a densidade de carga sobre esse volume.

No caso de uma carga puntiforme localizada na posição $\vec{r}_0$, toda a carga encontra-se concentrada em um único ponto do espaço. Para representar matematicamente essa situação, utiliza-se a função delta de Dirac. Procuramos uma densidade volumétrica $\rho(\vec{r})$ tal que

$$\int_V \rho(\vec{r}) dV = q.$$

A escolha

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

satisfaz imediatamente essa condição, pois

$$\int_V q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = q \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = q.$$

A função delta atua como um filtro da integral, anulando todas as contribuições exceto aquela correspondente ao ponto $\vec{r}_0$. Dessa forma, toda a carga fica concentrada nesse único ponto, embora continuemos utilizando a linguagem das distribuições contínuas.

Se a carga estiver em movimento, sua posição passa a depender do tempo,

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t),$$

e a densidade volumétrica correspondente torna-se

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)).$$

Podemos então verificar a consistência da definição da densidade de corrente,

$$\vec{J} = \rho \vec{v}.$$

Substituindo a densidade de carga da partícula,

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)).$$

Multiplicando por um elemento de volume dV ,

$$\vec{J} dV = q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) dV.$$

Integrando sobre um volume que contenha a partícula,

$$\int_V \vec{J} dV = q \vec{v} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) dV,$$

de onde segue

$$\int_V \vec{J} dV = q \vec{v}.$$

Este resultado mostra que a quantidade $q \vec{v}$, que aparece naturalmente na força magnética sobre uma carga puntiforme, corresponde ao análogo discreto do elemento de corrente volumétrico $\vec{J} dV$. Assim, as descrições de partículas e distribuições contínuas são perfeitamente consistentes entre si.

2.4.2 Equação da Continuidade

A equação da continuidade é a expressão matemática da conservação da carga elétrica. Sua interpretação física é simples: a carga elétrica não pode ser criada nem destruída; ela apenas se desloca de uma região para outra. Assim, qualquer diminuição da carga contida em um volume deve estar associada a uma corrente líquida saindo desse volume.

Considere um volume fixo V imerso em uma distribuição de corrente, conforme ilustrado na figura.

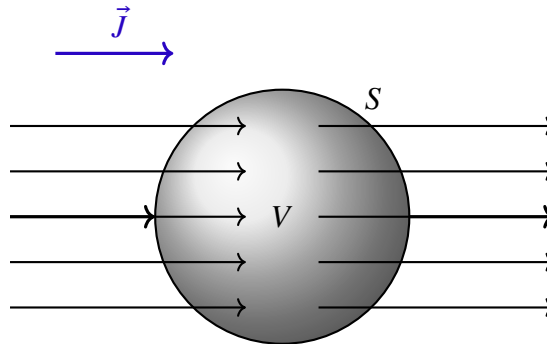


Figura 31: Volume de controle imerso em uma distribuição de corrente. As linhas de corrente atravessam a superfície fechada S , permitindo relacionar o fluxo de corrente à variação da carga armazenada no interior do volume.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Se Q representa a carga total armazenada no interior do volume, então

$$Q = \int_V \rho dV.$$

Quando existe uma corrente líquida saindo da região considerada, a carga armazenada em seu interior diminui. Por essa razão,

$$I = -\frac{dQ}{dt}.$$

O sinal negativo surge da convenção adotada para a corrente. Correntes positivas correspondem a fluxo de carga saindo do volume, enquanto Q representa a carga armazenada em seu interior. Portanto, quando a corrente líquida é positiva, a carga interna necessariamente diminui.

Substituindo a expressão para Q ,

$$I = -\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right).$$

Como o volume considerado é fixo no espaço,

$$\frac{d(dV)}{dt} = 0.$$

Assim, a derivada atua apenas sobre a densidade de carga,

$$I = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Por outro lado, a corrente total que atravessa a superfície fechada S que envolve o volume pode ser calculada diretamente a partir da densidade de corrente,

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Aplicando o Teorema da Divergência,

$$I = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV.$$

É importante observar que o volume V presente nesta integral é exatamente o mesmo volume utilizado na expressão da carga armazenada. Em ambos os casos, a integração é realizada sobre a mesma região física do espaço. Dessa forma, as duas expressões obtidas para a corrente podem ser igualadas,

$$- \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV.$$

Reunindo os termos em uma única integral,

$$\int_V \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Como essa igualdade deve ser válida para qualquer volume arbitrário V , conclui-se que o integrando deve ser identicamente nulo. Portanto,

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Esta é a forma diferencial da equação da continuidade.

No regime magnetostático, as distribuições de carga e corrente não variam com o tempo. Consequentemente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

e a equação da continuidade reduz-se a

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Esse resultado mostra que, em magnetostática, as linhas de corrente não possuem fontes nem sorvedouros no interior do domínio considerado: toda corrente que entra em uma região deve necessariamente sair dela.

2.4.3 Lei de Biot–Savart

A Lei de Biot–Savart estabelece a relação entre uma distribuição de corrente elétrica estacionária e o campo magnético produzido por ela. Assim como a Lei de Coulomb permite determinar o campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas, a Lei de Biot–Savart fornece o campo magnético gerado por uma distribuição de correntes.

Seu princípio fundamental afirma que cada elemento infinitesimal de corrente contribui com uma parcela diferencial do campo magnético em um ponto do espaço. O campo total é obtido pela superposição de todas essas contribuições.

Considere um elemento diferencial de corrente $I d\vec{\ell}$ localizado na posição $\vec{r}'$, e um ponto de observação P localizado na posição $\vec{r}$, conforme ilustrado na figura.

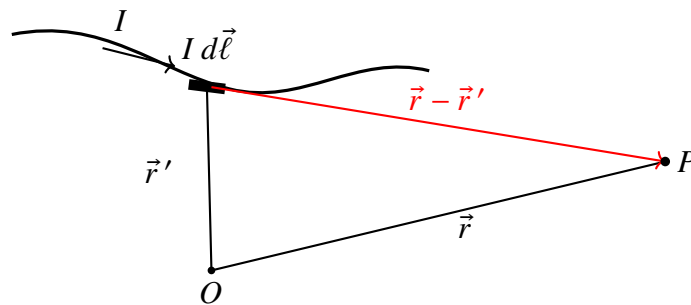


Figura 32: Geometria utilizada na Lei de Biot–Savart. O elemento de corrente $I d\vec{\ell}$, localizado na posição $\vec{r}'$, produz uma contribuição para o campo magnético no ponto de observação P , localizado na posição $\vec{r}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A distância entre o elemento de corrente e o ponto de observação é dada por

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

O módulo dessa distância é

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

O versor que aponta do elemento de corrente para o ponto de observação é

$$\hat{a}_{(\vec{r}-\vec{r}')} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

A Lei de Biot–Savart afirma que o campo magnético produzido pela distribuição de corrente é dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{a}_{(\vec{r}-\vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}.$$

A direção da contribuição diferencial do campo magnético é determinada pelo produto vetorial entre o elemento de corrente $I d\vec{l}$ e o versor $\hat{a}_{(\vec{r}-\vec{r}')}$. Dessa forma, o campo magnético é sempre perpendicular ao plano formado pelo elemento de corrente e pelo vetor que liga a fonte ao ponto de observação.

Observa-se ainda que a intensidade da contribuição decai com o quadrado da distância entre a fonte e o ponto de observação, comportamento análogo ao encontrado na Lei de Coulomb para o campo elétrico.

É importante observar que o elemento de corrente $I d\vec{l}$ presente na Lei de Biot–Savart não constitui a única forma de descrever uma fonte magnética. Conforme discutido anteriormente, todas as descrições de corrente representam a mesma quantidade física fundamental, associada a uma carga em movimento. Dessa forma,

$$dq \vec{v} = I d\vec{l} = \vec{K} dA = \vec{J} dV.$$

Consequentemente, a Lei de Biot–Savart pode ser reescrita para distribuições lineares, superficiais ou volumétricas de corrente simplesmente substituindo-se o elemento $I d\vec{l}$ pela descrição mais conveniente da distribuição considerada.

2.4.4 Campo Magnético Produzido por um Fio Retilíneo Infinito

Uma das aplicações mais importantes da Lei de Biot–Savart consiste na determinação do campo magnético produzido por um fio retilíneo percorrido por uma corrente constante I . Além

de possuir grande relevância prática, este problema ilustra claramente a utilização da lei em uma situação de alta simetria.

Considere um fio retilíneo coincidente com o eixo x , percorrido por uma corrente I , e um ponto de observação P localizado a uma distância perpendicular r do fio.

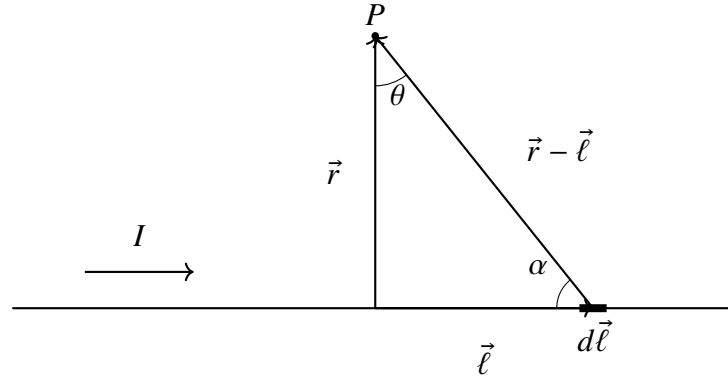


Figura 33: Geometria utilizada no cálculo do campo magnético produzido por um fio retilíneo através da Lei de Biot–Savart.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Lei de Biot–Savart,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{a}_{(\vec{r}-\vec{\ell})}}{|\vec{r}-\vec{\ell}|^2}.$$

O módulo da contribuição diferencial é

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi |\vec{r}-\vec{\ell}|^2},$$

onde α é o ângulo entre o elemento de corrente $d\vec{\ell}$ e o vetor que liga esse elemento ao ponto de observação.

Observando a geometria da figura, verifica-se que

$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \ell^2}}$$

e que

$$|\vec{r}-\vec{\ell}| = \sqrt{r^2 + \ell^2}.$$

Substituindo essas relações na expressão anterior,

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r dl}{(r^2 + \ell^2)^{3/2}}.$$

Como todas as contribuições possuem a mesma direção, perpendicular ao plano da figura, o campo total é obtido integrando-se ao longo de todo o fio,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{r dl}{(r^2 + \ell^2)^{3/2}}.$$

Neste ponto, a integração pode ser simplificada através da mudança de variável angular ilustrada na figura abaixo.

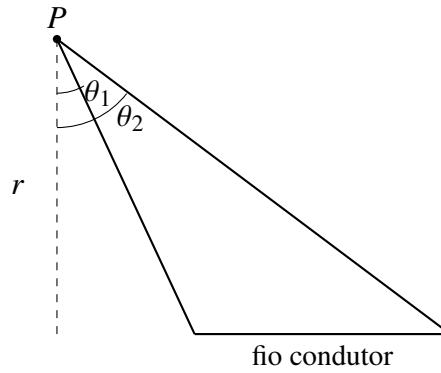


Figura 34: Geometria utilizada para determinar os limites angulares da integração na Lei de Biot–Savart para um fio retilíneo finito.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Da figura, observa-se que

$$\tan \theta = \frac{\ell}{r},$$

de onde segue

$$\ell = r \tan \theta.$$

Derivando,

$$d\ell = r \sec^2 \theta d\theta.$$

Além disso,

$$r^2 + \ell^2 = r^2(1 + \tan^2 \theta) = r^2 \sec^2 \theta.$$

Portanto,

$$(r^2 + \ell^2)^{3/2} = r^3 \sec^3 \theta.$$

Substituindo na integral,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{r (r \sec^2 \theta) d\theta}{r^3 \sec^3 \theta}.$$

Simplificando,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int \cos \theta d\theta.$$

Os limites de integração são determinados pela geometria da segunda figura. Para um fio de comprimento arbitrário,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta.$$

Assim,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\sin \theta]_{\theta_1}^{\theta_2},$$

ou seja,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1).$$

Esta expressão fornece o campo magnético produzido por um segmento retilíneo finito percorrido por corrente.

Para o caso particular de um fio infinito,

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Como

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

e

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

segue que

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(2).$$

Finalmente,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

A direção do campo magnético é tangente às circunferências centradas sobre o fio, sendo seu sentido determinado pela regra da mão direita.

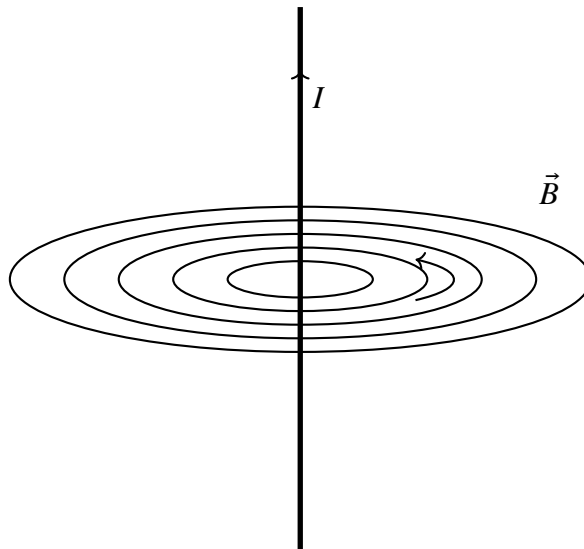


Figura 35: Linhas de campo magnético produzidas por um fio retilíneo percorrido por corrente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Força entre Dois Fios Paralelos

Uma aplicação importante da força magnética sobre correntes consiste na interação entre dois fios retilíneos paralelos percorridos por correntes estacionárias. Considere dois fios muito longos separados por uma distância r , transportando correntes I_1 e I_2 , conforme ilustrado na figura.

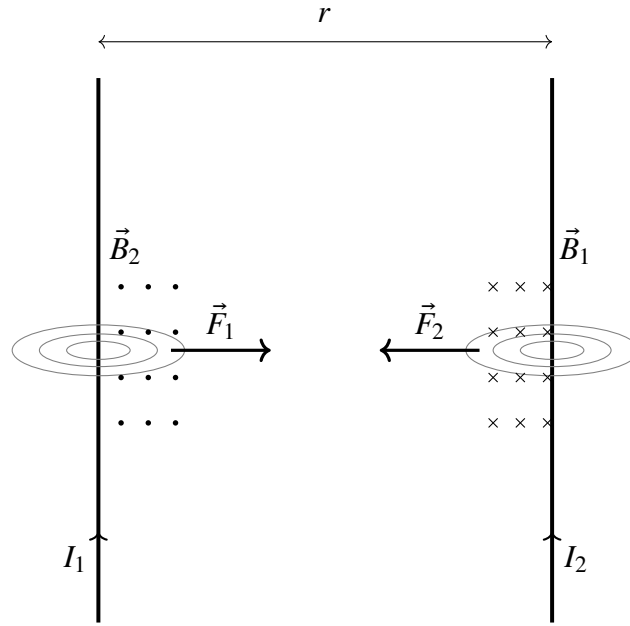


Figura 36: Forças magnéticas entre dois fios retilíneos paralelos percorridos por correntes no mesmo sentido. O campo magnético produzido por cada fio atua sobre a corrente do outro, resultando em uma força de atração mútua.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O campo magnético produzido pelo fio 1 no local onde se encontra o fio 2 é dado pelo resultado obtido na seção anterior,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

A força magnética exercida sobre o fio 2 pode ser calculada a partir da expressão geral

$$\vec{F} = I_2 \int d\vec{\ell} \times \vec{B}_1.$$

Como o campo magnético produzido pelo fio 1 é perpendicular ao elemento de corrente $d\vec{\ell}$ do fio 2, o módulo da força torna-se

$$F = I_2 \int B_1 d\ell.$$

Além disso, para dois fios paralelos separados por uma distância fixa r , o campo B_1 possui o mesmo valor ao longo de todo o trecho considerado do fio. Assim,

$$F = I_2 B_1 \int d\ell.$$

Se o comprimento analisado do fio for L ,

$$F = I_2 B_1 L.$$

Substituindo a expressão para o campo magnético produzido pelo fio 1,

$$F = I_2 \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \right) L.$$

Portanto,

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}.$$

Dividindo ambos os lados pelo comprimento L , obtém-se a força magnética por unidade de comprimento,

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}.$$

Este resultado mostra que a força é diretamente proporcional ao produto das correntes e inversamente proporcional à distância entre os fios.

A direção da força é determinada pela regra da mão direita aplicada à expressão

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

Quando as correntes possuem o mesmo sentido, os fios se atraem mutuamente. Por outro lado, quando as correntes possuem sentidos opostos, as forças mudam de direção e os fios passam a se repelir.

2.4.5 Entendendo o Campo Magnético como uma Manifestação Relativística do Campo Elétrico

A Lei de Biot–Savart permite obter uma interpretação particularmente interessante do campo magnético produzido por uma carga puntiforme em movimento. Para isso, consideremos a forma da lei escrita em termos de uma distribuição volumétrica de corrente,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

Antes de prosseguir, vale recordar a representação de uma carga puntiforme em termos de densidade volumétrica de carga. Conforme discutido anteriormente, uma carga q localizada na posição $\vec{r}_0$ pode ser descrita pela distribuição

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

uma vez que

$$\int_V \rho dV = \int_V q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = q.$$

Utilizando a definição da densidade volumétrica de corrente,

$$\vec{J} = \rho \vec{v},$$

segue que

$$\vec{J}(\vec{r}) = q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Além disso,

$$\int_V \vec{J} dV = q \vec{v},$$

mostrando que a descrição de uma carga puntiforme em movimento é completamente consistente com a relação anteriormente obtida,

$$dq \vec{v} = I d\vec{l} = \vec{K} dA = \vec{J} dV.$$

Dessa forma, a Lei de Biot–Savart para uma partícula pode ser obtida diretamente a partir de sua forma volumétrica mediante a utilização da função delta de Dirac. Para uma carga puntiforme q movendo-se com velocidade constante $\vec{V}$, a densidade de corrente pode ser representada por

$$\vec{J}(\vec{r}') = q \vec{V} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0),$$

onde $\vec{r}_0$ representa a posição instantânea da carga.

Substituindo essa expressão na Lei de Biot–Savart,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{q \vec{V} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

A propriedade filtrante da função delta permite eliminar a integral imediatamente, resultando em

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{V} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}.$$

Reorganizando os termos,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{V} \times \left[\frac{q}{4\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right].$$

Multiplicando e dividindo a expressão por ε_0 ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{V} \times \left[\frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right].$$

A quantidade entre colchetes é precisamente o campo elétrico produzido por uma carga puntiforme,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}.$$

Portanto,

$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{V} \times \vec{E}.$$

Nas próximas etapas da disciplina é demonstrado que as constantes fundamentais do eletromagnetismo satisfazem a relação

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2},$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Consequentemente,

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{V} \times \vec{E}.$$

Esse resultado sugere uma profunda conexão entre os campos elétrico e magnético. Em particular, ele indica que o campo magnético produzido por uma carga em movimento pode ser interpretado como uma consequência da combinação entre um campo elétrico e o movimento relativo entre observador e fonte. Essa ideia é formalizada posteriormente pela Teoria da Relatividade Restrita, na qual os campos elétrico e magnético passam a ser compreendidos como diferentes manifestações de uma mesma entidade física: o campo eletromagnético.

2.4.6 Divergente do Campo Magnético

Uma propriedade fundamental dos campos magnéticos é que suas linhas de campo não possuem início nem fim. Diferentemente do campo elétrico, cujas linhas podem surgir ou terminar em cargas elétricas, as linhas de campo magnético formam sempre curvas fechadas. Matematicamente, essa propriedade é expressa pela relação

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Para demonstrá-la, partimos da forma volumétrica da Lei de Biot–Savart,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

Aplicando o operador divergente em ambos os lados,

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV'.$$

Utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}),$$

obtemos

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\nabla \times \vec{J}) - \vec{J} \cdot \nabla \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] dV'.$$

O primeiro termo é nulo porque o operador ∇ atua sobre as coordenadas sem linha (x, y, z) , enquanto $\vec{J}(\vec{r}')$ depende apenas das coordenadas de integração (x', y', z') . Assim,

$$\nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = 0.$$

Resta analisar o segundo termo. Observe que

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right).$$

Portanto, esse campo pode ser escrito como o gradiente de um potencial escalar.

Sabemos que o rotacional de um campo gradiente é identicamente nulo. De fato, pelo Teorema Fundamental das Integrais de Linha,

$$\int_C \nabla V \cdot d\vec{l} = V(B) - V(A).$$

Quando o percurso é fechado,

$$A = B,$$

e conseqüentemente

$$\oint_C \nabla V \cdot d\vec{l} = 0.$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C \nabla V \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \nabla V) \cdot d\vec{S},$$

o que implica

$$\nabla \times (\nabla V) = 0.$$

Logo,

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 0.$$

Os dois termos do integrando são nulos, resultando em

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Conclui-se, portanto, que o campo magnético não possui fontes nem sorvedouros. Em outras palavras, não existem monopolos magnéticos isolados e as linhas de campo magnético formam sempre curvas fechadas.

2.4.7 O Rotacional do Campo Magnético

Uma vez obtida a expressão do campo magnético produzido por um fio retilíneo infinito, é possível investigar uma importante propriedade local desse campo através do operador rotacional.

Considere um fio retilíneo infinito percorrido por uma corrente I , orientado ao longo do eixo z . Conforme demonstrado anteriormente, o campo magnético produzido por esse fio é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi.$$

Considere agora uma curva fechada C envolvendo o fio, conforme ilustrado na figura.

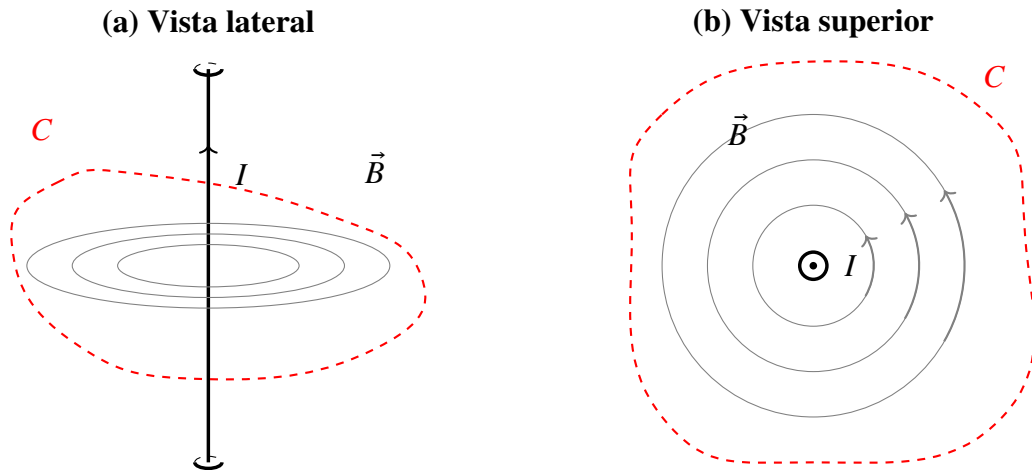


Figura 37: Curva fechada arbitrária envolvendo um fio retilíneo percorrido por corrente. A circulação do campo magnético ao longo da curva depende apenas da corrente total atravessando a superfície delimitada por C .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em coordenadas cilíndricas, o elemento diferencial de comprimento pode ser escrito como

$$d\vec{l} = dr \hat{a}_r + r d\phi \hat{a}_\phi + dz \hat{a}_z.$$

Calculando o produto escalar entre o campo magnético e o elemento diferencial de comprimento,

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \right) \cdot (dr \hat{a}_r + r d\phi \hat{a}_\phi + dz \hat{a}_z).$$

Como os versores cilíndricos são ortogonais,

$$\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_r = 0, \quad \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = 0, \quad \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = 1,$$

segue que

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r d\phi).$$

Portanto,

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi.$$

Integrando ao longo de toda a curva fechada,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\phi.$$

Como a curva envolve completamente o fio,

$$\oint_C d\phi = 2\pi,$$

resultando em

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

Aplicando o Teorema de Stokes,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}.$$

Logo,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I.$$

Por outro lado, a corrente que atravessa a superfície S pode ser escrita em termos da densidade de corrente,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Substituindo na expressão anterior,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Portanto,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

O resultado mostra que correntes elétricas atuam como fontes do rotacional do campo magnético, estabelecendo uma importante distinção em relação ao campo elétrico eletrostático, cujo rotacional é nulo.

2.4.8 Formas Integrais e a Lei de Ampère

As equações diferenciais obtidas anteriormente podem ser reescritas em suas formas integrais, revelando interpretações geométricas importantes para o campo magnético.

Partindo da relação

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

e aplicando o Teorema da Divergência, obtém-se

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Como o divergente do campo magnético é nulo em todos os pontos do espaço,

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Esta é a forma integral da Lei de Gauss para o magnetismo. Ela afirma que o fluxo magnético líquido através de qualquer superfície fechada é sempre nulo. Em outras palavras, as linhas de campo magnético não possuem origem nem término, formando sempre curvas fechadas.

De maneira análoga, na seção anterior foi obtida a relação

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

Aplicando o Teorema de Stokes,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S},$$

segue que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Reconhecendo que

$$I_{\text{enc}} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

representa a corrente total que atravessa a superfície delimitada pela curva C , obtém-se

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

Esta expressão é conhecida como **Lei de Ampère**.

A curva fechada C utilizada na integração recebe o nome de **curva amperiana**. A corrente I_{enc} corresponde à soma algébrica de todas as correntes que atravessam a superfície

delimitada por essa curva. Dessa forma, a Lei de Ampère relaciona a circulação do campo magnético ao redor de um caminho fechado com a corrente total enlaçada por esse caminho.

Uma característica particularmente importante da Lei de Ampère é sua aplicabilidade em problemas que apresentam elevado grau de simetria. Em muitas situações físicas, a direção do campo magnético pode ser determinada previamente por argumentos geométricos e pela regra da mão direita. Conhecido o sentido do campo, torna-se possível escolher uma curva amperiana adequada para a qual o produto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ assuma uma forma simples.

Nessas circunstâncias, a integral de linha pode ser calculada diretamente, permitindo determinar o módulo do campo magnético de maneira muito mais simples do que pela aplicação direta da Lei de Biot–Savart. Por essa razão, a Lei de Ampère constitui uma das ferramentas mais poderosas da magnetostática para o cálculo de campos magnéticos em sistemas com alta simetria.

Nas próximas seções serão apresentados alguns exemplos clássicos de aplicação da Lei de Ampère, evidenciando como a escolha apropriada da curva amperiana permite determinar o campo magnético de forma rápida e elegante.

Campo Magnético Produzido por um Fio Retilíneo Infinito

Considere um fio retilíneo infinito percorrido por uma corrente I . Conforme discutido anteriormente, as linhas de campo magnético produzidas por esse fio são circunferências concêntricas centradas sobre o eixo do condutor, com sentido determinado pela regra da mão direita.

A elevada simetria do problema sugere a escolha de uma curva amperiana circular de raio r , também centrada sobre o fio, conforme ilustrado na Figura 38.

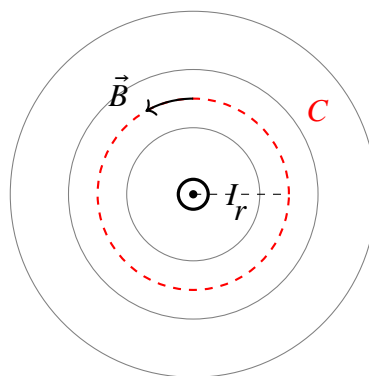


Figura 38: Curva amperiana circular utilizada no cálculo do campo magnético produzido por um fio retilíneo infinito.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A escolha dessa amperiana não é arbitrária. Em cada ponto da curva C , o vetor campo magnético é tangente à trajetória de integração. Consequentemente,

$$\vec{B} \parallel d\vec{\ell},$$

o que implica

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell.$$

Além disso, devido à simetria cilíndrica do problema, o módulo do campo magnético permanece constante ao longo de toda a amperiana. Dessa forma, a Lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

torna-se

$$B \oint_C d\ell = \mu_0 I.$$

Como a integral de linha corresponde ao comprimento da circunferência de raio r ,

$$\oint_C d\ell = 2\pi r,$$

segue que

$$B(2\pi r) = \mu_0 I.$$

Portanto,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Observa-se que a simplicidade da dedução decorre diretamente da escolha apropriada da amperiana. Em problemas com elevado grau de simetria, a Lei de Ampère permite obter o campo magnético de maneira extremamente eficiente, evitando integrações mais elaboradas associadas à Lei de Biot–Savart.

Campo Magnético Produzido por um Plano Infinito de Corrente

Considere uma superfície plana infinita percorrida por uma densidade superficial de corrente uniforme $\vec{K}$, conforme ilustrado na Figura 39.

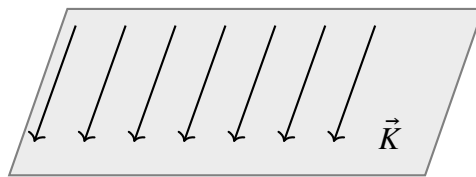


Figura 39: Plano infinito percorrido por uma densidade superficial de corrente uniforme $\vec{K}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para compreender a direção do campo magnético produzido por essa distribuição, pode-se imaginar a superfície como sendo formada por um número muito grande de fios retilíneos infinitos paralelos, todos percorridos por correntes no mesmo sentido.

Cada fio produz linhas de campo magnético circulares ao seu redor. Quando as contribuições de todos os fios são somadas, observa-se que as componentes verticais do campo magnético cancelam-se mutuamente por simetria. De fato, para cada fio localizado à esquerda de um ponto de observação existe um fio equivalente à direita produzindo uma contribuição vertical de mesma intensidade e sentido oposto.

Por outro lado, as componentes horizontais possuem o mesmo sentido e, portanto, somam-se. Como consequência, o campo magnético resultante torna-se uniforme e paralelo ao plano de corrente. Além disso, os sentidos do campo acima e abaixo da superfície são opostos, conforme determinado pela regra da mão direita.

A Figura 40 apresenta uma vista frontal da distribuição de corrente, juntamente com uma curva amperiana retangular utilizada para a aplicação da Lei de Ampère.

Vista frontal

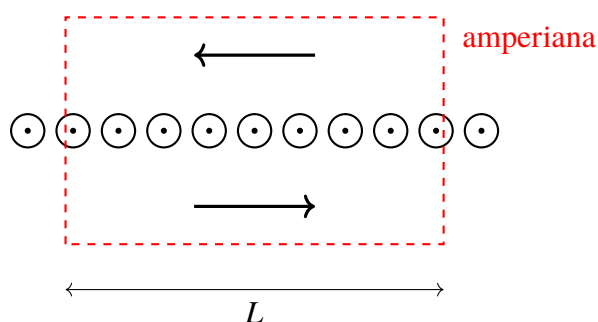


Figura 40: Amperiana utilizada na aplicação da Lei de Ampère para uma corrente superficial uniforme.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A elevada simetria do problema permite concluir que o campo magnético possui módulo constante ao longo dos segmentos superior e inferior da amperiana. Além disso, nesses trechos o vetor campo magnético é paralelo ao elemento diferencial de comprimento $d\vec{\ell}$.

Por outro lado, nos segmentos laterais da amperiana o campo magnético é perpendicular ao caminho de integração, de modo que

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Assim, a Lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

reduz-se à contribuição dos segmentos superior e inferior da amperiana,

$$BL + BL = \mu_0 I_{\text{enc}},$$

ou seja,

$$2BL = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

A corrente enlaçada pela amperiana é obtida multiplicando-se a densidade superficial de corrente pelo comprimento interceptado da superfície,

$$I_{\text{enc}} = KL.$$

Substituindo essa expressão na Lei de Ampère,

$$2BL = \mu_0 KL.$$

Cancelando o fator L ,

$$2B = \mu_0 K.$$

Finalmente,

$$B = \frac{\mu_0 K}{2}.$$

Conclui-se, portanto, que o campo magnético produzido por um plano infinito percorrido por uma densidade superficial de corrente uniforme possui módulo constante em ambos os lados da superfície,

$$B = \frac{\mu_0 K}{2},$$

apresentando sentidos opostos acima e abaixo do plano.

Campo Magnético Produzido por um Solenoide Ideal

Considere inicialmente o solenoide representado na Figura 41. Embora seja constituído por um único fio enrolado helicoidalmente, é conveniente observar que, quando projetamos suas espiras no plano da figura, surgem duas fileiras de elementos de corrente: uma superior, representada pelos símbolos $\otimes$, correspondendo a trechos da corrente entrando no plano da página, e uma inferior, representada pelos símbolos $\odot$, correspondendo a trechos da corrente saindo do plano.

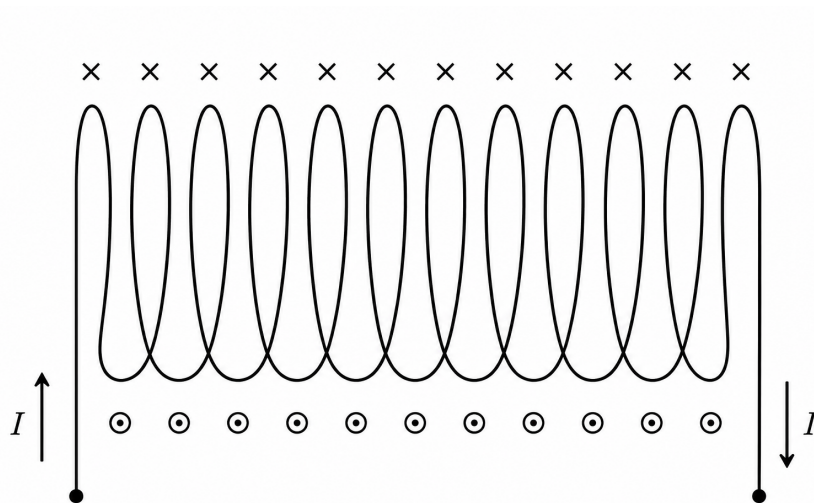


Figura 41: Representação de um solenóide.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa observação permite compreender qualitativamente a formação do campo magnético no interior do solenoide. A Figura 42 apresenta as contribuições produzidas por essas duas fileiras de correntes.

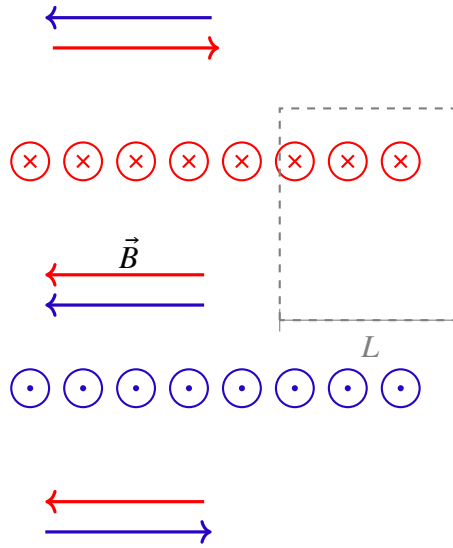


Figura 42: Contribuições das duas fileiras de espiras para o campo magnético de um solenoide. As contribuições no interior possuem o mesmo sentido e se reforçam mutuamente, enquanto fora do solenoide tendem a se cancelar.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Aplicando a regra da mão direita aos elementos de corrente da fileira superior ($\otimes$), verifica-se que o campo magnético produzido acima dessa fileira aponta para a direita, enquanto abaixo aponta para a esquerda. Analogamente, para a fileira inferior ($\odot$), o campo magnético aponta para a esquerda acima da fileira e para a direita abaixo dela.

Observa-se então que, na região compreendida entre as duas fileiras, as contribuições possuem o mesmo sentido e se reforçam mutuamente. Em contrapartida, nas regiões externas ao solenoide, as contribuições possuem sentidos opostos e tendem a se cancelar.

À medida que o número de espiras aumenta, esse cancelamento externo torna-se cada vez mais pronunciado, enquanto o reforço interno torna-se mais intenso. No limite de um solenoide ideal infinitamente longo, o campo magnético externo pode ser considerado desprezível quando comparado ao campo existente em seu interior,

$$\vec{B}_{\text{ext}} \approx 0,$$

ao passo que, no interior do solenoide, o campo magnético torna-se aproximadamente uniforme e paralelo ao seu eixo.

Essa elevada simetria permite a aplicação da Lei de Ampère utilizando a curva amperiana retangular indicada na Figura 42. Assim,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

No segmento superior da amperiana, situado fora do solenoide, o campo magnético é aproximadamente nulo, de modo que sua contribuição para a integral pode ser desprezada.

Nos segmentos laterais, o campo magnético é perpendicular ao elemento diferencial de comprimento $d\vec{\ell}$, resultando em

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Consequentemente, apenas o segmento interno da amperiana contribui para a integral de linha, fornecendo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = BL.$$

Resta determinar a corrente enlaçada pela superfície delimitada pela amperiana. Se existem N espiras atravessando essa superfície e cada espira transporta uma corrente I , então

$$I_{\text{enc}} = NI.$$

Substituindo esse resultado na Lei de Ampère,

$$BL = \mu_0 NI.$$

Dividindo ambos os lados por L ,

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I.$$

Portanto, o campo magnético produzido por um solenoide ideal é dado por

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I.$$

Esse resultado mostra que a intensidade do campo magnético cresce linearmente com a corrente elétrica que percorre as espiras e com o número de espiras por unidade de comprimento do solenoide.

2.4.9 Condições de Contorno da Magnetostática

Assim como na eletrostática, as equações fundamentais da magnetostática permitem estabelecer relações entre os campos magnéticos imediatamente acima e abaixo de uma interface. Essas relações são conhecidas como condições de contorno do campo magnético.

Componente Normal ($B_{\perp}$)

Para determinar o comportamento da componente normal do campo magnético, aplicamos a Lei de Gauss para o magnetismo na forma integral a uma superfície gaussiana cilíndrica de altura infinitesimal atravessando a interface entre dois meios.

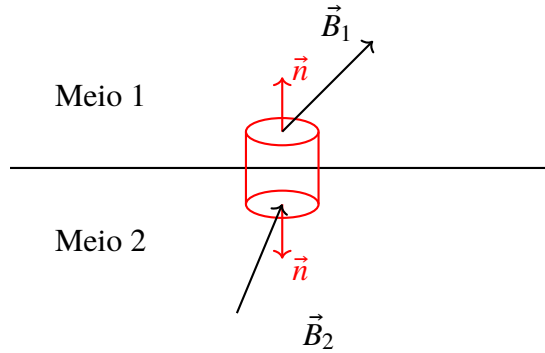


Figura 43: Superfície gaussiana atravessando a interface entre dois meios.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Lei de Gauss para o campo magnético estabelece que

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

No limite em que a altura do cilindro tende a zero, as contribuições da superfície lateral tornam-se desprezíveis, restando apenas os fluxos através das tampas superior e inferior.

Assim,

$$B_{1\perp}A - B_{2\perp}A = 0.$$

Cancelando a área A ,

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0.$$

Portanto,

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}.$$

Conclui-se que a componente normal do campo magnético é contínua através da interface.

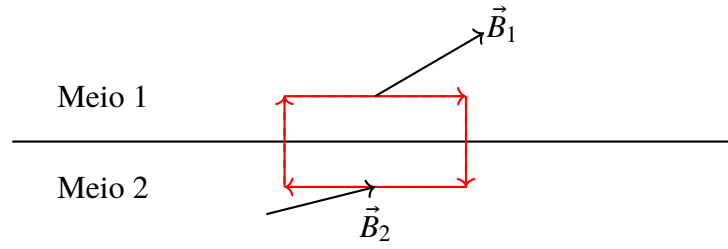


Figura 44: Caminho fechado atravessando a interface entre dois meios.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Lei de Ampère estabelece que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

No limite em que a altura do retângulo tende a zero, as contribuições dos lados perpendiculares ao campo tornam-se desprezíveis. Restam apenas os segmentos paralelos à interface.

Desse modo,

$$B_{1\parallel} \ell - B_{2\parallel} \ell = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

Se existir uma densidade superficial de corrente $\vec{K}$ concentrada na interface, a corrente enlaçada pela amperiana será

$$I_{\text{enc}} = K \ell.$$

Substituindo,

$$B_{1\parallel} \ell - B_{2\parallel} \ell = \mu_0 K \ell.$$

Cancelando o comprimento ℓ ,

$$B_{1\parallel} - B_{2\parallel} = \mu_0 K.$$

Portanto, a descontinuidade da componente tangencial do campo magnético é determinada pela densidade superficial de corrente presente na interface.

Em resumo, as condições de contorno da magnetostática são

$$B_{1\perp} = B_{2\perp},$$

e

$$B_{1\parallel} - B_{2\parallel} = \mu_0 K.$$

Observa-se que essas relações são complementares às obtidas para o campo elétrico: enquanto a componente normal de $\vec{E}$ pode apresentar descontinuidade devido à presença de carga superficial, é a componente tangencial de $\vec{B}$ que pode apresentar descontinuidade em virtude da existência de uma corrente superficial.

2.4.10 Torque sobre uma Espira Percorrida por Corrente

Considere uma espira retangular de lados a e b , percorrida por uma corrente constante I , imersa em um campo magnético uniforme $\mathbf{B}$. Seja $\hat{n}$ o vetor unitário normal ao plano da espira, formando um ângulo θ com a direção do campo magnético, conforme ilustrado na Figura 45.

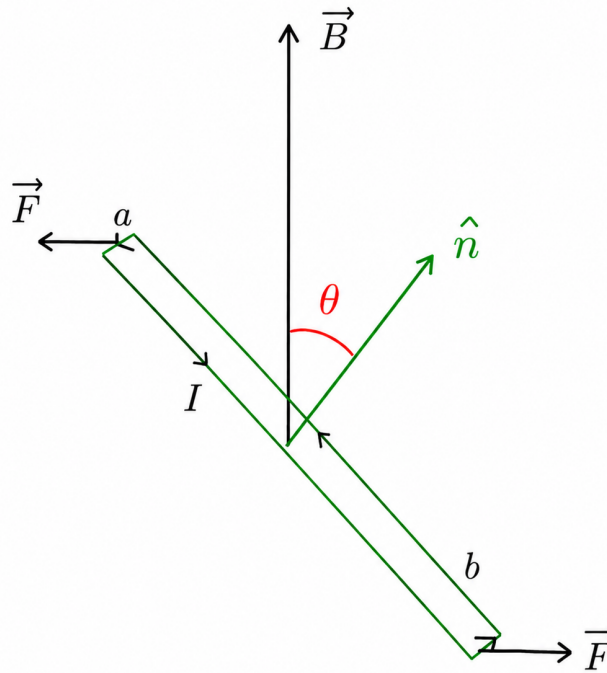


Figura 45: Espira retangular percorrida por corrente imersa em um campo magnético uniforme. O vetor normal $\hat{n}$ forma um ângulo θ com o campo magnético aplicado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A força magnética exercida sobre um elemento diferencial de corrente é dada por

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Aplicando essa expressão a cada lado da espira, verifica-se que todos os lados estão sujeitos à ação do campo magnético. Entretanto, as forças atuantes em um dos pares de lados apenas tendem a deformar a espira, produzindo esforços internos de tração e compressão, sem contribuir para sua rotação. Por outro lado, as forças atuantes no outro par de lados possuem mesma intensidade e sentidos opostos, porém atuam em linhas de ação distintas, formando um binário responsável pelo torque exercido sobre a espira.

O módulo da força magnética em cada um desses lados é

$$F = IaB,$$

em que a corresponde ao comprimento do lado perpendicular ao campo magnético.

Como a distância perpendicular entre as linhas de ação das forças é igual a

$$\frac{b \sin \theta}{2},$$

o torque resultante possui módulo

$$\tau = 2F \left(\frac{b \sin \theta}{2} \right).$$

Substituindo a expressão da força magnética, obtém-se

$$\tau = (IaB)(b \sin \theta),$$

ou, equivalentemente,

$$\tau = IabB \sin \theta.$$

Como a área da espira é dada por

$$A = ab,$$

segue que

$$\tau = IAB \sin \theta.$$

A expressão anterior evidencia que o torque depende apenas da corrente elétrica, da área da espira, da intensidade do campo magnético e da orientação da espira em relação ao campo.

Define-se, então, o **momento de dipolo magnético** como

$$\mathbf{m} = IA \hat{\mathbf{n}},$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário perpendicular ao plano da espira, cujo sentido é determinado pela regra da mão direita.

Substituindo essa definição na expressão anterior, obtém-se a forma vetorial do torque,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Essa equação mostra que o campo magnético tende a alinhar o momento magnético da espira com sua direção. O torque é máximo quando $\mathbf{m}$ é perpendicular ao campo magnético e nulo quando ambos os vetores são paralelos.

2.4.11 Potencial Vetorial Magnético

Na eletrostática, o campo elétrico é descrito pelas equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Observa-se que a equação homogênea é justamente aquela cujo segundo membro é nulo. Como o rotacional do gradiente de qualquer função escalar é identicamente nulo,

$$\nabla \times (\nabla V) = 0,$$

é natural definir o campo elétrico em termos de um potencial escalar,

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

Essa definição satisfaz automaticamente a condição

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

restando apenas utilizar a equação da divergência para determinar a função potencial.

Aplicando o operador divergente em ambos os lados,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\nabla V) = -\nabla^2 V.$$

Substituindo esse resultado na Lei de Gauss,

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

ou, de forma equivalente,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

obtem-se a equação de Poisson, cuja solução é

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

Uma vez conhecido o potencial elétrico, basta calcular seu gradiente para determinar o campo elétrico.

O desenvolvimento do potencial vetorial magnético segue exatamente a mesma ideia.

Na magnetostática, as equações fundamentais são

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Novamente, observa-se que a equação homogênea é aquela cujo segundo membro é nulo. Como o divergente do rotacional de qualquer campo vetorial é identicamente nulo,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

é natural definir o campo magnético como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

em que $\mathbf{A}$ é denominado **potencial vetorial magnético**.

Essa definição satisfaz automaticamente a condição

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

restando apenas utilizar a Lei de Ampère para determinar o potencial vetorial.

Substituindo a definição anterior na Lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J},$$

obtem-se

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Aplicando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

segue que

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Entretanto, essa equação ainda é pouco conveniente, pois envolve simultaneamente a divergência e o laplaciano do potencial vetorial.

Para simplificar sua resolução, introduz-se um novo potencial vetorial

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

em que f é denominada **função de calibre** (ou função de gauge).

Essa transformação não altera o campo magnético, pois

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla f).$$

Como

$$\nabla \times (\nabla f) = 0,$$

segue que

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Assim, diferentes potenciais vetoriais podem representar exatamente o mesmo campo magnético.

A vantagem dessa liberdade consiste em escolher adequadamente a função f , de modo que o novo potencial satisfaça

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0.$$

Essa escolha é conhecida como **calibre de Coulomb**.

Nessas condições,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}') = 0,$$

e a equação anterior reduz-se a

$$-\nabla^2 \mathbf{A}' = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Como, a partir desse ponto, apenas o potencial calibrado será utilizado, costuma-se omitir o apóstrofo e escrever simplesmente

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Observa-se que essa equação possui exatamente a mesma estrutura da equação de Poisson da eletrostática,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

sendo, portanto, conhecida sua solução,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

Embora $\mathbf{A}$ seja um campo vetorial, cada uma de suas componentes satisfaz individualmente uma equação de Poisson. Dessa forma, a determinação do potencial vetorial é, em geral, mais simples do que calcular diretamente a integral da Lei de Biot–Savart.

Uma vez conhecido o potencial vetorial magnético, o campo magnético é obtido simplesmente calculando seu rotacional,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Percebe-se, portanto, uma notável analogia entre a eletrostática e a magnetostática. Na eletrostática, determina-se inicialmente o potencial escalar V e, posteriormente, calcula-se seu gradiente para obter o campo elétrico. De maneira análoga, na magnetostática determina-se inicialmente o potencial vetorial $\mathbf{A}$ e, em seguida, calcula-se seu rotacional para obter o campo magnético.

2.4.12 Campo Magnético na Matéria

Até o momento, todas as expressões desenvolvidas para o campo magnético consideraram apenas correntes elétricas livres como fontes do campo. Entretanto, na maioria das aplicações práticas da Engenharia Elétrica, como motores, transformadores, indutores e máquinas elétricas em geral, o campo magnético interage com materiais capazes de modificar significativamente sua intensidade e distribuição espacial. Para descrever matematicamente esse comportamento, torna-se necessário compreender como a matéria responde à aplicação de um campo magnético externo.

Embora um material não seja constituído por pequenas espiras de corrente, o movimento orbital dos elétrons ao redor do núcleo e o momento angular intrínseco (spin) fazem com que cada átomo possua um momento de dipolo magnético equivalente ao produzido por uma pequena espira percorrida por corrente. Na ausência de um campo magnético externo, esses dipolos encontram-se orientados aleatoriamente, fazendo com que o momento magnético resultante do material seja praticamente nulo. Entretanto, quando um campo magnético é aplicado, parte desses dipolos tende a alinhar-se com o campo, produzindo uma magnetização macroscópica do material.

A expressão obtida para o potencial vetor produzido por um único dipolo magnético é dada por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{a}_R}{R^2},$$

em que

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,$$

e

$$\hat{a}_R = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

o potencial vetor produzido por uma distribuição contínua de dipolos magnéticos pode ser obtido pela superposição das contribuições de todos os dipolos presentes no volume,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{m} \times \hat{a}_R}{R^2} dv'.$$

Assim como foi feito no estudo da polarização elétrica, torna-se conveniente definir uma grandeza macroscópica capaz de representar a densidade volumétrica de momentos de dipolo magnético. Essa grandeza é denominada **magnetização** e é definida por

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dv'}.$$

Fisicamente, a magnetização representa o momento de dipolo magnético existente por unidade de volume do material. Consequentemente,

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M} dv',$$

permitindo escrever o potencial vetorial na forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{a}_R}{R^2} dv'.$$

Observa-se que essa expressão apresenta grande analogia com aquela obtida anteriormente para o potencial elétrico de um dielétrico polarizado. Em ambas as formulações, a influência da distribuição de dipolos sobre o ponto de observação é descrita pelo mesmo versor $\hat{a}_R$, orientado da fonte para o ponto onde se deseja determinar o potencial. A diferença essencial encontra-se na operação vetorial utilizada: no caso elétrico, o potencial resulta do produto escalar entre o vetor polarização e o versor $\hat{a}_R$, ao passo que, no caso magnético, o potencial vetorial resulta do produto vetorial entre o vetor magnetização e o versor $\hat{a}_R$. Essa diferença reflete a própria natureza das grandezas envolvidas, uma vez que o potencial elétrico é uma grandeza escalar, enquanto o potencial vetorial magnético constitui uma grandeza vetorial.

Para prosseguir com a dedução, utiliza-se a identidade

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\hat{a}_R}{R^2},$$

em que o operador gradiente atua sobre as coordenadas da fonte $\mathbf{r}'$. Substituindo essa relação na expressão anterior, obtém-se

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'.$$

A forma acima é particularmente conveniente, pois permite empregar identidades vetoriais para transformar a integral em expressões que revelarão naturalmente as correntes equivalentes produzidas pela magnetização do material.

Partindo desta expressão, utiliza-se a seguinte identidade vetorial

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f),$$

em que f é uma função escalar e $\mathbf{A}$ um campo vetorial.

Tomando

$$f = \frac{1}{R},$$

e

$$\mathbf{A} = \mathbf{M},$$

obtém-se

$$\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\nabla' \times \mathbf{M}) - \mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right).$$

Rearranjando os termos,

$$\mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right).$$

Substituindo essa identidade na expressão do potencial vetorial,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) \right] dv',$$

ou, separando as integrais,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) dv'.$$

A primeira integral já se encontra em uma forma conveniente. Entretanto, a segunda ainda envolve o rotacional de um campo integrado sobre um volume. Para transformá-la em uma integral de superfície, emprega-se uma identidade obtida diretamente a partir do Teorema da Divergência.

Considere inicialmente o Teorema da Divergência,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Escolhe-se agora

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} \times \mathbf{A},$$

em que $\mathbf{C}$ representa um vetor constante.

Aplicando a identidade do divergente do produto vetorial,

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}),$$

e observando que

$$\nabla \times \mathbf{C} = 0,$$

por se tratar de um vetor constante, resulta

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Substituindo esse resultado no Teorema da Divergência,

$$-\int_V \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \oint_S (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Utilizando a propriedade cíclica do produto misto,

$$(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times d\mathbf{s}),$$

obtem-se

$$-\mathbf{C} \cdot \int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \mathbf{C} \cdot \oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{s}.$$

Como o vetor constante $\mathbf{C}$ é arbitrário, conclui-se que os vetores multiplicados por ele devem ser iguais, chegando-se à importante identidade

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} dv = - \oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{s}.$$

Aplicando essa relação à segunda integral do potencial vetorial, tomando

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{M}}{R},$$

obtem-se

$$\int_V \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) dv' = - \oint_S \frac{\mathbf{M}}{R} \times d\mathbf{s}.$$

Substituindo esse resultado na expressão do potencial vetorial, os sinais negativos cancelam-se, resultando em

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M} \times d\mathbf{s}}{R}.$$

A expressão anterior possui uma interpretação física extremamente importante. Observa-se que a magnetização do material produz duas contribuições distintas para o potencial vetorial:

uma distribuída por todo o volume do material e outra concentrada sobre sua superfície. Essa observação motiva a definição das chamadas **correntes ligadas** ou **correntes de magnetização**.

Define-se a densidade de corrente volumétrica de magnetização como

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M},$$

e a densidade superficial de corrente de magnetização como

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}},$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor unitário normal à superfície do material.

Como

$$d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{n}} ds,$$

segue que

$$\mathbf{M} \times d\mathbf{s} = (\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}) ds = \mathbf{K}_b ds.$$

Finalmente, o potencial vetorial pode ser escrito na forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_b}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}_b}{R} ds.$$

Essa expressão mostra que a magnetização de um material pode ser interpretada como uma distribuição equivalente de correntes ligadas, tanto no volume quanto na superfície do material. Dessa forma, o campo magnético produzido por um material magnetizado pode ser calculado da mesma maneira que o campo produzido por correntes elétricas convencionais, bastando substituir as correntes físicas pelas correntes equivalentes de magnetização.

2.4.13 Correntes de Magnetização

As expressões obtidas na seção anterior mostraram que um material magnetizado pode ser representado por distribuições equivalentes de correntes volumétricas e superficiais. Entretanto, para compreender a origem física dessas correntes, é conveniente analisar, ainda que de forma qualitativa, a estrutura microscópica da matéria.

Embora os átomos não sejam constituídos por pequenas espiras de corrente reais, o movimento orbital dos elétrons em torno do núcleo e o momento angular intrínseco (*spin*) fazem com que cada átomo possua um momento de dipolo magnético. Do ponto de vista macroscópico, esses dipolos podem ser representados por pequenas espiras de corrente equivalentes, cujo momento

de dipolo magnético é dado pela regra da mão direita. Essa representação é particularmente útil, pois permite interpretar a magnetização da matéria utilizando os resultados obtidos anteriormente para o torque exercido sobre uma espira percorrida por corrente imersa em um campo magnético uniforme.

Na ausência de um campo magnético externo, os momentos de dipolo equivalentes encontram-se orientados de maneira aproximadamente aleatória, fazendo com que a magnetização resultante do material seja praticamente nula. Quando um campo magnético externo é aplicado, cada dipolo sofre a ação do torque, o qual tende a orientar o momento de dipolo magnético na direção do campo aplicado. A resposta coletiva desses dipolos determina o comportamento magnético macroscópico do material.

A Figura 46 apresenta uma representação esquemática desse processo. Ressalta-se que as espiras ilustradas não representam correntes reais existentes no interior dos átomos, mas sim um modelo equivalente empregado para representar os momentos de dipolo magnético responsáveis pela magnetização do material.

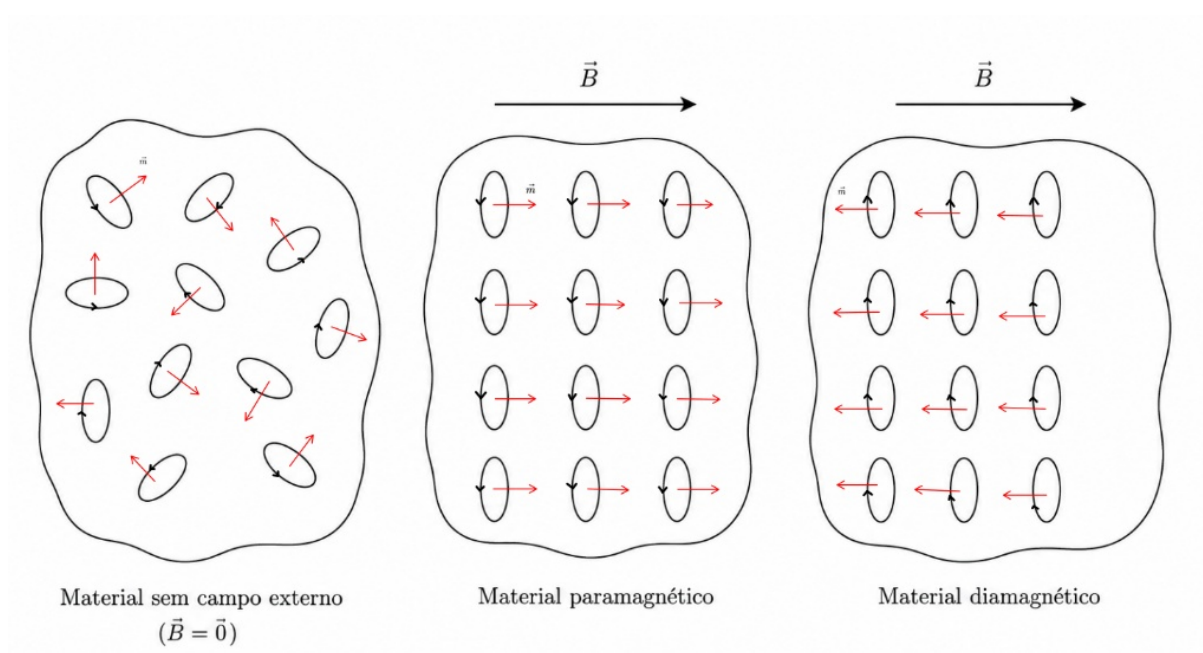


Figura 46: Comportamento resultante dos momentos de dipolo magnético dos materiais na presença de campo externo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nos materiais com comportamento **paramagnético**, existem momentos de dipolo magnético permanentes, associados principalmente aos elétrons desemparelhados. Na presença de um campo magnético externo, esses dipolos apresentam tendência de alinhamento com o campo aplicado, produzindo uma magnetização resultante no mesmo sentido de $\mathbf{B}$, porém de baixa intensidade.

Nos materiais com comportamento **diamagnético**, o campo magnético externo modifica o movimento orbital dos elétrons ao redor do núcleo, induzindo momentos de dipolo magnético equivalentes que tendem a orientar-se em sentido oposto ao campo aplicado. Como consequência, a magnetização resultante ocorre em sentido contrário ao campo externo. Embora esse efeito esteja presente em todos os materiais, sua intensidade é, em geral, relativamente pequena.

Há ainda os materiais com comportamento **ferromagnético** apresentam uma interação muito mais intensa entre seus dipolos magnéticos. Nesses materiais, regiões contendo grande quantidade de dipolos naturalmente alinhados, denominadas domínios magnéticos, podem existir mesmo na ausência de um campo externo. Quando um campo magnético é aplicado, esses domínios tendem a alinhar-se no mesmo sentido do campo externo, produzindo uma magnetização muito superior à observada nos materiais paramagnéticos e diamagnéticos. Essa forte tendência de alinhamento é responsável pelas elevadas intensidades de magnetização características desses materiais.

As correntes de magnetização introduzidas anteriormente podem, portanto, ser interpretadas como uma consequência macroscópica da orientação coletiva desses momentos de dipolo magnético equivalentes. Assim, embora não correspondam a correntes elétricas livres percorrendo condutores, produzem campos magnéticos que podem ser descritos pelo mesmo formalismo matemático utilizado para correntes convencionais.

2.4.14 O Campo Magnético Auxiliar

As expressões desenvolvidas nas seções anteriores mostraram que o campo magnético em um material é produzido tanto pelas correntes elétricas livres quanto pelas correntes equivalentes de magnetização. Dessa forma, a Lei de Ampère, na forma diferencial, pode ser escrita como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b),$$

em que $\mathbf{J}_f$ representa a densidade de corrente livre e $\mathbf{J}_b$ a densidade de corrente de magnetização.

Na seção anterior foi demonstrado que a densidade de corrente volumétrica de magnetização é dada por

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}.$$

Substituindo essa expressão na Lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_f + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}.$$

Reagrupando os termos,

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_f,$$

ou, utilizando a linearidade do operador rotacional,

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f.$$

Essa expressão motiva a definição do chamado **campo magnético auxiliar**, ou simplesmente **campo $\mathbf{H}$** , definido por

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Com essa definição, a Lei de Ampère assume uma forma particularmente simples,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f.$$

Observa-se que, diferentemente do campo magnético $\mathbf{B}$, o campo auxiliar $\mathbf{H}$ depende exclusivamente das correntes livres. Essa propriedade possui grande importância prática, pois as correntes livres são aquelas efetivamente impostas e medidas em laboratório por meio de condutores e fontes de corrente. Assim, o campo $\mathbf{H}$ pode ser determinado diretamente a partir das correntes aplicadas, independentemente do material presente.

Aplicando o Teorema de Stokes em ambos os lados da expressão anterior,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s},$$

obtém-se

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f,$$

em que I_f representa a corrente livre que atravessa a superfície limitada pelo contorno C .

Embora o campo $\mathbf{H}$ seja determinado apenas pelas correntes livres, o campo magnético efetivamente existente no interior do material continua sendo dado por

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Para muitos materiais utilizados em aplicações de Engenharia Elétrica, a magnetização apresenta uma dependência aproximadamente linear com o campo auxiliar. De maneira análoga ao que ocorre em dielétricos lineares, admite-se que

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

em que χ_m é denominada **susceptibilidade magnética** do material.

O sinal da susceptibilidade caracteriza o comportamento magnético do material. Para materiais com comportamento diamagnético,

$$\chi_m < 0,$$

fazendo com que a magnetização se oponha ao campo aplicado. Nos materiais com comportamento paramagnético,

$$\chi_m > 0,$$

de modo que a magnetização ocorre no mesmo sentido do campo. Já os materiais ferromagnéticos apresentam susceptibilidades muito maiores que as dos materiais paramagnéticos,

$$\chi_m \gg 1,$$

produzindo magnetizações extremamente intensas.

Substituindo a relação constitutiva na expressão do campo magnético,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}),$$

obtém-se

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}.$$

Define-se então a permeabilidade magnética do material como

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m),$$

permitindo escrever

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

De forma análoga ao caso da permissividade elétrica, define-se ainda a permeabilidade relativa,

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m.$$

Como exemplo de aplicação, considere novamente o solenoide infinito estudado anteriormente. Aplicando a Lei de Ampère para o campo auxiliar,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = nIl,$$

resulta

$$H = nI.$$

Observa-se que o campo auxiliar depende apenas da densidade de espiras e da corrente elétrica aplicada, sendo independente do material inserido no interior do solenoide.

O campo magnético, por sua vez, é obtido por

$$B = \mu H = \mu nI.$$

No vácuo,

$$B = \mu_0 nI.$$

Em materiais com comportamento paramagnético,

$$\mu > \mu_0,$$

fazendo com que o campo magnético seja maior que no vácuo.

Nos materiais com comportamento diamagnético,

$$\mu < \mu_0,$$

resultando em um campo magnético ligeiramente menor.

Já nos materiais ferromagnéticos,

$$\mu \gg \mu_0,$$

produzindo campos magnéticos muito superiores aos obtidos no vácuo para a mesma corrente aplicada.

Conclui-se, portanto, que o campo auxiliar $\mathbf{H}$ é determinado exclusivamente pelas correntes livres, enquanto o campo magnético $\mathbf{B}$ depende também da resposta do material por meio de sua magnetização. Essa distinção torna o campo $\mathbf{H}$ uma ferramenta extremamente útil na análise de dispositivos eletromagnéticos, permitindo separar os efeitos produzidos pelas fontes de corrente daqueles decorrentes das propriedades magnéticas da matéria.

2.4.15 Exemplo: Cilindro Diamagnético Percorrido por uma Corrente Uniforme

Como aplicação dos conceitos desenvolvidos nas seções anteriores, considere um cilindro maciço, muito longo, de raio R , constituído por um material diamagnético de permeabilidade magnética μ , percorrido por uma corrente elétrica contínua e uniformemente distribuída I , orientada ao longo do eixo do cilindro.

O objetivo deste exemplo é determinar, de forma sistemática, o campo auxiliar $\mathbf{H}$, o campo magnético $\mathbf{B}$, a magnetização $\mathbf{M}$ e as correntes de magnetização volumétrica e superficial associadas ao material. Ao final, será apresentada uma interpretação física desses resultados por meio de representações esquemáticas.

A Figura 47 ilustra o sistema considerado, bem como as amperianas utilizadas para a determinação dos campos magnéticos no interior e no exterior do cilindro.

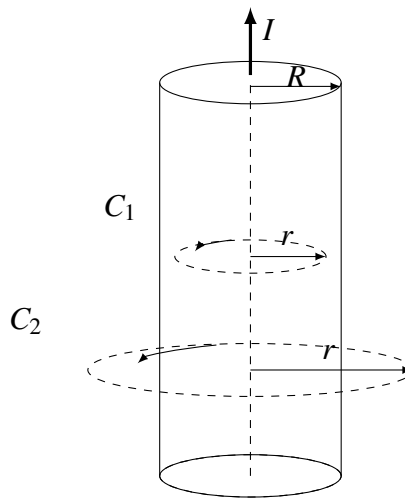


Figura 47: Cilindro maciço percorrido por uma corrente uniforme I . As curvas C_1 ($r < R$) e C_2 ($r > R$) representam as amperianas utilizadas para a determinação dos campos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como a distribuição de corrente possui simetria cilíndrica, o campo auxiliar apresenta direção puramente azimutal, podendo ser escrito como

$$\mathbf{H} = H(r) \hat{\phi}.$$

Aplicando a Lei de Ampère ao campo auxiliar,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{livre}},$$

inicialmente para uma amperiana circular de raio $r < R$, obtém-se

$$H(2\pi r) = J(\pi r^2),$$

em que a densidade de corrente uniforme vale

$$J = \frac{I}{\pi R^2}.$$

Substituindo essa expressão na equação anterior,

$$H(2\pi r) = \frac{I}{\pi R^2} (\pi r^2),$$

resultando em

$$\mathbf{H} = \frac{Ir}{2\pi R^2} \hat{\phi}, \quad r < R.$$

Observa-se que o módulo do campo auxiliar cresce linearmente com a distância ao eixo do cilindro, sendo nulo no centro e máximo na superfície.

Para uma amperiana situada no exterior do cilindro ($r > R$), toda a corrente livre é envolvida pela curva de integração. Assim,

$$H(2\pi r) = I,$$

de onde segue

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad r > R.$$

Nota-se que, fora do condutor, o campo auxiliar passa a decrescer inversamente com a distância ao eixo, comportamento idêntico ao observado para um fio retilíneo infinitamente longo.

Conhecido o campo auxiliar, o campo magnético é obtido diretamente por meio da relação constitutiva

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

Substituindo as expressões obtidas para o campo auxiliar na relação constitutiva, obtém-se os campos magnéticos no interior e no exterior do cilindro.

Para $r < R$,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu \left(\frac{Ir}{2\pi R^2} \right) \hat{\phi},$$

ou seja,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu Ir}{2\pi R^2} \hat{\phi}, \quad r < R.$$

Para a região externa ($r > R$), o meio passa a ser o vácuo, cuja permeabilidade é μ_0 . Assim,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

resultando em

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad r > R.$$

Conhecidos os campos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$, pode-se determinar a magnetização do material.

Partindo da relação

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

segue que

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}.$$

Substituindo a expressão do campo magnético no interior do cilindro,

$$\mathbf{M} = \frac{\mu}{\mu_0} \frac{Ir}{2\pi R^2} \hat{\phi} - \frac{Ir}{2\pi R^2} \hat{\phi},$$

obtém-se

$$\mathbf{M} = \frac{Ir}{2\pi R^2} \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{\phi}.$$

Como

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0},$$

segue que

$$\mathbf{M} = \frac{Ir}{2\pi R^2}(\mu_r - 1)\hat{\phi}.$$

Recordando que

$$\mu_r = 1 + \chi_m,$$

obtém-se finalmente

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{Ir}{2\pi R^2} \hat{\phi}.$$

Como o material considerado é diamagnético, sua suscetibilidade magnética é negativa, isto é,

$$\chi_m < 0.$$

Consequentemente, o vetor magnetização possui sentido oposto ao campo auxiliar e ao campo magnético, podendo ser escrito como

$$\mathbf{M} = -|\chi_m| \frac{Ir}{2\pi R^2} \hat{\phi}.$$

A Figura 48 ilustra essa situação. Observa-se que os campos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ possuem o mesmo sentido azimuthal, enquanto a magnetização induzida orienta-se no sentido oposto, característica típica de materiais diamagnéticos.

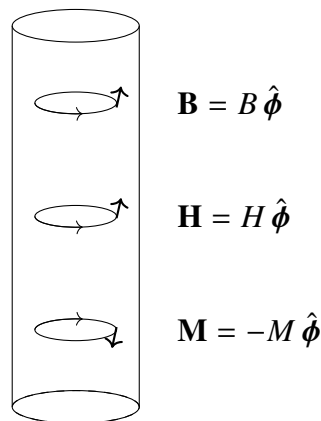


Figura 48: Representação esquemática do campo magnético $\mathbf{B}$, do campo auxiliar $\mathbf{H}$ e da magnetização $\mathbf{M}$ no interior de um cilindro diamagnético percorrido por uma corrente uniforme. Observa-se que $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ possuem o mesmo sentido azimuthal, enquanto a magnetização induzida apresenta sentido oposto ao campo aplicado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além de possuir sentido oposto ao campo aplicado, observa-se que a intensidade da magnetização cresce linearmente com a distância ao eixo do cilindro, uma vez que

$$|\mathbf{M}| = |\chi_m| \frac{Ir}{2\pi R^2}.$$

Como o raio r aumenta do centro em direção à superfície, o módulo da magnetização também aumenta nessa direção.

Fisicamente, isso significa que os momentos de dipolo magnético equivalentes tornam-se progressivamente mais intensos à medida que se afastam do eixo do cilindro. Uma forma conveniente de representar esse comportamento consiste em associar cada momento de dipolo magnético a uma pequena espira de corrente equivalente. Assim, quanto maior o momento de dipolo, maior é a área efetiva dessa espira equivalente conforme se aproxima da superfície do cilindro.

A variação espacial da magnetização dá origem às chamadas **correntes de magnetização de volume**, cuja densidade é definida por

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}.$$

Como, no interior do cilindro,

$$\mathbf{M} = -|\chi_m| \frac{Ir}{2\pi R^2} \hat{\phi},$$

utilizando a expressão do rotacional em coordenadas cilíndricas para um campo puramente azimutal,

$$\nabla \times (M_\phi \hat{\phi}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\phi) \hat{z},$$

obtem-se

$$\mathbf{J}_b = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[-|\chi_m| \frac{Ir^2}{2\pi R^2} \right] \hat{z},$$

ou

$$\mathbf{J}_b = -|\chi_m| \frac{I}{\pi R^2} \hat{z}.$$

Observa-se que a corrente de magnetização de volume possui módulo constante em todo o interior do cilindro e encontra-se orientada no sentido negativo do eixo z .

Na superfície lateral surge ainda uma corrente superficial de magnetização, dada por

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}},$$

em que

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$$

é o vetor normal unitário à superfície do cilindro.

Como, na superfície ($r = R$),

$$\mathbf{M} = -|\chi_m| \frac{I}{2\pi R} \hat{\phi},$$

segue que

$$\mathbf{K}_b = -|\chi_m| \frac{I}{2\pi R} \hat{\phi} \times \hat{\mathbf{r}}.$$

Utilizando a relação vetorial

$$\hat{\phi} \times \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{z}},$$

obtém-se

$$\mathbf{K}_b = |\chi_m| \frac{I}{2\pi R} \hat{\mathbf{z}}.$$

Portanto, a corrente superficial de magnetização encontra-se orientada ao longo do eixo do cilindro, no mesmo sentido da corrente livre aplicada.

A interpretação física desses resultados é apresentada na Figura 49.

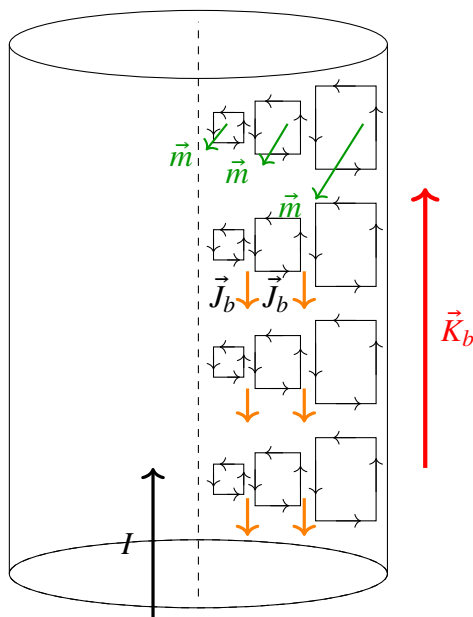


Figura 49: Representação esquemática da magnetização em um cilindro diamagnético percorrido por uma corrente elétrica uniforme I . As espiras representam os dipolos magnéticos equivalentes associados ao material, cujo momento magnético $\mathbf{m}$ aumenta com a distância ao eixo do cilindro em decorrência do crescimento da magnetização. A não uniformidade da magnetização origina uma densidade de corrente ligada de volume $\mathbf{J}_b$, enquanto, na superfície lateral do material, surge a densidade de corrente superficial ligada $\mathbf{K}_b$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 49 permite compreender a origem física das correntes de magnetização. Embora os dipolos magnéticos individuais sejam representados por espiras de corrente equivalentes, essas espiras não correspondem a correntes reais circulando no material, mas constituem um modelo capaz de descrever a magnetização microscópica produzida pelo movimento orbital e pelo spin dos elétrons.

Observa-se que, devido ao aumento gradual da magnetização em direção à superfície do cilindro, representado pelo crescimento das espiras equivalentes, as correntes existentes nas laterais verticais de espiras adjacentes deixam de se cancelar completamente. O resultado desse desequilíbrio é o aparecimento de uma densidade de corrente ligada de volume $\mathbf{J}_b$, dirigida para baixo ao longo do eixo do cilindro.

Na superfície lateral ocorre um fenômeno distinto. Como não existem dipolos magnéticos externos ao material para cancelar a corrente da última camada de espiras equivalentes, permanece uma corrente superficial ligada $\mathbf{K}_b$, orientada para cima e paralela à corrente livre que percorre o cilindro.

Esse exemplo evidencia como a descrição macroscópica da magnetização, expressa pelos vetores $\mathbf{M}$, $\mathbf{J}_b$ e $\mathbf{K}_b$, está diretamente relacionada ao comportamento coletivo dos dipolos magnéticos equivalentes presentes no material, estabelecendo uma conexão entre a interpretação

microscópica da magnetização e as equações macroscópicas do eletromagnetismo.

2.5 Extensão das Equações de Maxwell para Campos Variáveis no Tempo

Nas seções anteriores, foram desenvolvidas as equações fundamentais da eletrostática e da magnetostática, considerando distribuições de carga e correntes estacionárias. Nesse regime, os campos elétrico e magnético independem do tempo, permitindo que as equações de Maxwell assumam formas simplificadas, nas quais os campos elétricos e magnéticos são tratados de maneira independente.

Entretanto, diversos fenômenos eletromagnéticos envolvem campos variáveis no tempo, tornando necessário generalizar essas equações. Experimentalmente, observa-se que um campo magnético variável é capaz de induzir um campo elétrico, da mesma forma que um campo elétrico variável pode atuar como fonte de campo magnético. Essa interação entre os campos elétrico e magnético constitui um dos pilares da teoria eletromagnética formulada por Maxwell.

Nesta seção serão apresentados, de forma sucinta, os principais resultados que estendem a teoria desenvolvida até o momento. Inicialmente será discutida a Lei de Faraday e a Lei de Lenz, responsáveis pela descrição do fenômeno da indução eletromagnética. Em seguida, será introduzido o conceito de indutância por meio do exemplo de um solenoide longo. Posteriormente, será apresentada a corrente de deslocamento proposta por Maxwell, evidenciando a necessidade de modificar a Lei de Ampère para preservar a conservação da carga elétrica em situações variáveis no tempo. Por fim, serão reunidas as quatro equações de Maxwell em suas formas diferenciais e integrais, completando a formulação clássica do eletromagnetismo.

2.5.1 Lei de Faraday e Lei de Lenz

Até o momento, considerou-se que os campos elétricos e magnéticos eram independentes do tempo. Entretanto, experimentos realizados por Michael Faraday mostraram que uma variação temporal do fluxo magnético através de uma superfície limitada por um circuito fechado é capaz de induzir uma força eletromotriz nesse circuito, fenômeno conhecido como **indução eletromagnética**.

A intensidade da força eletromotriz induzida é dada pela Lei de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

em que Φ_B representa o fluxo magnético através da superfície delimitada pelo circuito,

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Substituindo a definição de fluxo magnético, obtém-se

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Por outro lado, a força eletromotriz também pode ser expressa como a circulação do campo elétrico ao longo do contorno da superfície,

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Igualando as duas expressões, resulta a forma integral da Lei de Faraday,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Aplicando o Teorema de Stokes ao primeiro membro,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

e como a igualdade deve ser válida para qualquer superfície arbitrária, conclui-se que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Essa é a forma diferencial da Lei de Faraday e corresponde à terceira equação de Maxwell.

O sinal negativo presente na Lei de Faraday é consequência da **Lei de Lenz**, segundo a qual a corrente induzida possui sentido tal que o campo magnético por ela produzido se opõe à variação do fluxo magnético que lhe deu origem. Esse princípio garante a conservação da energia, impedindo que o processo de indução eletromagnética produza energia espontaneamente.

Observa-se, portanto, que um campo magnético variável no tempo é capaz de induzir um campo elétrico rotacional, diferentemente do regime eletrostático estudado anteriormente. Na eletrostática, o campo elétrico é conservativo, podendo ser escrito como o gradiente negativo de um potencial escalar,

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

Consequentemente, a circulação do campo elétrico ao longo de qualquer percurso fechado é nula,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

uma vez que essa integral representa a diferença de potencial entre o ponto inicial e o ponto final do percurso, que coincidem em uma curva fechada. Aplicando o Teorema de Stokes, conclui-se que

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

resultado obtido anteriormente para campos eletrostáticos.

Entretanto, quando o fluxo magnético através da superfície limitada pelo circuito varia com o tempo, a circulação do campo elétrico deixa de ser nula. Nesse caso, o campo elétrico induzido já não pode ser descrito apenas como o gradiente de um potencial escalar, pois passa a possuir linhas de campo fechadas, envolvendo a região onde ocorre a variação do fluxo magnético. Assim, a circulação do campo elétrico em torno de uma curva fechada torna-se igual à taxa de variação temporal do fluxo magnético, conduzindo à expressão

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

e, conseqüentemente,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Dessa forma, a condição $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ deixa de ser válida sempre que existirem campos magnéticos variáveis no tempo, mostrando que a Lei de Faraday constitui uma generalização natural do resultado obtido anteriormente para a eletrostática.

2.5.2 Indutância

Uma importante consequência da Lei de Faraday é o fenômeno da **autoindução**. Quando a corrente elétrica que percorre um circuito varia com o tempo, o campo magnético por ela produzido também varia, modificando o fluxo magnético através do próprio circuito. Como consequência, surge uma força eletromotriz induzida que se opõe à variação da corrente responsável por sua origem.

Considere um solenoide longo de comprimento l , área transversal A e constituído por N espiras. Conforme demonstrado anteriormente, o campo magnético em seu interior é aproximadamente uniforme e vale

$$\mathbf{B} = \mu \frac{N}{l} I \hat{\mathbf{a}}_z.$$

O fluxo magnético através de uma espira é definido por

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Como o campo magnético é uniforme e paralelo ao vetor área da seção transversal do solenoide, essa integral reduz-se simplesmente a

$$\Phi_B = BA.$$

Pela Lei de Faraday, a força eletromotriz induzida é proporcional à taxa de variação temporal do fluxo magnético. Como o solenoide possui N espiras e todas são atravessadas pelo mesmo fluxo magnético, o fluxo total concatenado é igual a $N\Phi_B$. Assim,

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Substituindo a expressão do fluxo magnético,

$$\mathcal{E} = -N \frac{d(BA)}{dt}.$$

Como a área da seção transversal permanece constante,

$$\mathcal{E} = -NA \frac{dB}{dt}.$$

Substituindo a expressão do campo magnético,

$$\mathbf{B} = \mu \frac{N}{l} I \hat{\mathbf{a}}_z,$$

obtem-se

$$\mathcal{E} = -NA \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{N}{l} I \right).$$

Como a permeabilidade magnética e a geometria do solenoide permanecem constantes,

$$\mathcal{E} = - \underbrace{\left(\mu \frac{N^2 A}{l} \right)}_L \frac{dI}{dt}.$$

A quantidade

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$

é denominada **indutância** do solenoide, dependendo exclusivamente de sua geometria e da permeabilidade magnética do meio.

Finalmente, a força eletromotriz induzida pode ser escrita na forma

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Essa expressão mostra que a tensão induzida é proporcional à taxa de variação da corrente elétrica. O sinal negativo, decorrente da Lei de Lenz, indica que a força eletromotriz induzida sempre atua de modo a se opor à variação da corrente que lhe deu origem, constituindo uma manifestação do princípio da conservação da energia.

2.5.3 Corrente de Deslocamento

A Lei de Ampère, desenvolvida para correntes estacionárias, estabelece que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f.$$

Embora essa expressão descreva corretamente campos magnéticos produzidos por correntes constantes, ela deixa de ser válida quando as cargas elétricas variam com o tempo.

Para evidenciar essa limitação, aplica-se o operador divergente em ambos os membros da equação,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_f.$$

Como o divergente do rotacional de qualquer campo vetorial é identicamente nulo,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0,$$

segue que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0.$$

Entretanto, essa conclusão contradiz a equação da continuidade, obtida anteriormente a partir da conservação da carga elétrica,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t},$$

a qual mostra que, sempre que a densidade de carga variar com o tempo, o divergente da densidade de corrente não pode ser nulo.

Para eliminar essa inconsistência, Maxwell utilizou a Lei de Gauss para meios materiais,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f.$$

Derivando ambos os membros em relação ao tempo,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t}.$$

Substituindo essa relação na equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right),$$

ou

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Observa-se que a soma

$$\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

possui divergente identicamente nulo, tornando-se compatível com o rotacional do campo auxiliar magnético.

Dessa forma, Maxwell propôs modificar a Lei de Ampère, obtendo

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

O termo

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

é denominado **densidade de corrente de deslocamento**. Apesar de não corresponder ao movimento real de cargas elétricas, esse termo produz campo magnético da mesma forma que uma corrente elétrica convencional, garantindo a consistência matemática das equações de Maxwell e a conservação da carga elétrica em situações envolvendo campos variáveis no tempo.

A introdução da corrente de deslocamento constitui uma das mais importantes contribuições de Maxwell para o eletromagnetismo, pois permitiu unificar a eletricidade e o magnetismo em uma única teoria e tornou possível a previsão teórica da existência das ondas eletromagnéticas.

2.5.4 Equações de Maxwell

As seções anteriores mostraram que a consideração de campos variáveis no tempo exige a generalização das equações desenvolvidas para a eletrostática e a magnetostática. Em particular, a Lei de Faraday introduz o acoplamento entre um campo magnético variável e um campo elétrico induzido, enquanto a corrente de deslocamento proposta por Maxwell completa a Lei de Ampère, tornando-a compatível com a conservação da carga elétrica.

Dessa forma, as quatro equações de Maxwell, escritas para meios materiais, assumem sua forma diferencial completa:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

As formas integrais correspondentes são dadas por

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_f,$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

e

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

As duas primeiras equações descrevem as fontes dos campos elétrico e magnético. A Lei de Gauss estabelece que as cargas elétricas livres constituem as fontes do campo elétrico, enquanto a inexistência de monopolos magnéticos implica que o fluxo magnético líquido através de qualquer superfície fechada seja sempre nulo.

As duas últimas equações descrevem o acoplamento entre os campos elétrico e magnético. A Lei de Faraday mostra que campos magnéticos variáveis induzem campos elétricos rotacionais, enquanto a Lei de Ampère-Maxwell estabelece que tanto correntes elétricas livres quanto campos elétricos variáveis constituem fontes de campos magnéticos.

Observa-se que, no regime estacionário, em que os campos não dependem do tempo,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0,$$

as equações de Maxwell reduzem-se às formas da eletrostática e da magnetostática desenvolvidas ao longo deste trabalho,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f.$$

Evidenciando que tais resultados constituem um caso particular da formulação geral proposta por Maxwell para campos eletromagnéticos dependentes do tempo.

As equações de Maxwell representam uma das maiores sínteses da Física Clássica, reunindo em um único conjunto de equações os fenômenos elétricos e magnéticos. A partir delas é possível descrever desde problemas envolvendo cargas e correntes estacionárias até a propagação de ondas eletromagnéticas, estabelecendo as bases para o estudo de áreas como eletrônica, telecomunicações, sistemas de potência, óptica e diversas outras aplicações da Engenharia Elétrica e da Física.

3 METODOLOGIA

3.1 Caracterização da Pesquisa

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa aplicada de natureza qualitativa, com finalidade educacional, voltada ao desenvolvimento de um material didático de apoio à disciplina de Teoria Eletromagnética para estudantes de Engenharia Elétrica.

A pesquisa possui caráter descritivo e fundamenta-se tanto na experiência acadêmica adquirida ao longo da graduação quanto na atuação do autor como monitor da disciplina por quatro semestres consecutivos. Essa vivência permitiu identificar as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes, especialmente aquelas relacionadas à interpretação física dos fenômenos eletromagnéticos e à aplicação das ferramentas matemáticas necessárias para sua compreensão.

Com base nessas observações, foi elaborado um material teórico e prático que busca integrar conceitos físicos, cálculo vetorial e estratégias de resolução de exercícios em uma abordagem direcionada às necessidades específicas dos alunos de Engenharia Elétrica.

3.2 Desenvolvimento do Material Didático

A elaboração do material foi realizada a partir de uma revisão bibliográfica das principais referências utilizadas na disciplina, com destaque para obras clássicas da área de eletromagnetismo e cálculo vetorial.

Durante o processo de desenvolvimento, buscou-se não apenas apresentar os resultados matemáticos tradicionalmente encontrados na literatura, mas também reconstruir as deduções passo a passo, enfatizando a interpretação geométrica dos operadores vetoriais e o significado físico das equações fundamentais do eletromagnetismo.

Além da exposição teórica, foram incorporadas representações gráficas, ilustrações desenvolvidas pelo próprio autor e estratégias de resolução de exercícios frequentemente observadas na disciplina, visando tornar o conteúdo mais acessível ao estudante.

3.3 Aplicação Prática do Material

Com o objetivo de avaliar a aplicabilidade da abordagem proposta, foi realizada uma atividade de caráter expositivo junto à turma da disciplina de Teoria Eletromagnética do curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal do Tocantins, durante o semestre letivo de 2026/1.

A atividade foi realizada com a anuência e supervisão do professor responsável pela disciplina, Prof. Roger Kitamura, e teve duração aproximada de uma hora e trinta minutos,

compreendendo o período entre 9h15 e 10h45.

A aula foi estruturada com base nos conteúdos que estavam sendo estudados pelos alunos naquele momento, abrangendo os temas Equações de Poisson e Laplace, bem como o Método das Imagens. Além desses tópicos, foi realizada uma revisão dos principais conceitos da eletrostática necessários para compreender a construção matemática dessas equações, estabelecendo uma sequência lógica desde as leis fundamentais até os resultados utilizados na resolução de problemas de valor de contorno.

Durante a atividade, foram apresentados exemplos resolvidos, deduções matemáticas e exercícios relacionados ao Método das Imagens, o qual foi discutido e desenvolvido pelos próprios estudantes durante a aula.

3.4 Observações e Interação com os Estudantes

Ao longo da atividade, observou-se participação ativa dos estudantes por meio de perguntas, discussões e comentários relacionados aos conteúdos apresentados.

A interação estabelecida durante a aula possibilitou identificar dúvidas recorrentes, dificuldades conceituais e expectativas dos alunos em relação à disciplina, fornecendo elementos importantes para avaliar a pertinência da abordagem adotada na elaboração do material.

Após a atividade expositiva, foi realizado um momento de conversa informal com os estudantes, permitindo ao autor compreender de forma mais aprofundada os desafios enfrentados durante o processo de aprendizagem da disciplina.

As observações obtidas durante essa experiência permitiram identificar dificuldades recorrentes relacionadas à compreensão dos conceitos matemáticos que fundamentam o eletromagnetismo e à conexão desses conceitos com sua interpretação física. Esses aspectos serviram como subsídios para o aperfeiçoamento do material didático desenvolvido, sem constituir, entretanto, uma validação quantitativa de sua efetividade.

3.5 Perspectivas de Validação da Proposta em Trabalhos Futuros

A atividade realizada durante a disciplina permitiu verificar a viabilidade da abordagem proposta e possibilitou observar, de forma qualitativa, a receptividade dos estudantes em relação ao material desenvolvido. Entretanto, essa etapa não teve como objetivo realizar uma validação quantitativa da proposta, uma vez que não foram empregados instrumentos específicos de avaliação da aprendizagem ou métodos estatísticos para comparação do desempenho dos estudantes.

Como continuidade deste trabalho, pretende-se realizar estudos experimentais que permitam avaliar, de maneira mais objetiva, a contribuição do material didático para o processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Teoria Eletromagnética. Entre as possibilidades de investigação, destacam-se a aplicação de questionários de percepção aos estudantes, a realização

de testes diagnósticos antes e após a utilização do material (pré-teste e pós-teste), bem como a comparação do desempenho entre turmas que utilizem metodologias distintas de ensino.

Outra possibilidade consiste na utilização do material durante todo um semestre letivo, permitindo acompanhar indicadores como desempenho acadêmico, índices de aprovação, frequência, participação em sala de aula e percepção dos estudantes quanto à clareza e à organização do conteúdo apresentado.

Essas estratégias poderão fornecer evidências quantitativas e qualitativas sobre a efetividade da proposta, contribuindo para seu aperfeiçoamento e para uma avaliação mais abrangente de seu potencial como ferramenta de apoio ao ensino de Eletromagnetismo em cursos de Engenharia Elétrica.

4 CONCLUSÃO

A disciplina de Teoria Eletromagnética ocupa posição fundamental na formação do engenheiro eletricista, estando diretamente relacionada a diversas áreas de atuação profissional. Entretanto, seu elevado grau de abstração física e o intenso formalismo matemático frequentemente tornam o processo de aprendizagem desafiador para os estudantes.

A experiência adquirida ao longo da graduação e da atuação como monitor da disciplina permitiu identificar que grande parte das dificuldades enfrentadas pelos alunos está associada não apenas aos conceitos físicos do eletromagnetismo, mas também às bases matemáticas necessárias para sua compreensão, especialmente aquelas relacionadas à geometria analítica e ao cálculo vetorial.

Diante desse cenário, este trabalho teve como objetivo desenvolver um material didático voltado especificamente aos estudantes de Engenharia Elétrica, reunindo os principais conteúdos da disciplina em uma abordagem que busca conciliar rigor matemático, interpretação física e estratégias de resolução de exercícios. Ao longo do texto, foram apresentados os fundamentos do cálculo vetorial, da eletrostática e da magnetostática, enfatizando não apenas os resultados finais, mas também as deduções e interpretações que permitem compreender a origem das principais equações utilizadas na área.

Como complemento ao desenvolvimento teórico, foi realizada uma atividade expositiva junto à turma da disciplina de Teoria Eletromagnética, sob supervisão do professor responsável. A experiência possibilitou aplicar parte do material produzido em um contexto real de ensino, promovendo discussões, resolução de exercícios e interação direta com os estudantes. As observações realizadas durante essa atividade reforçaram a percepção de que abordagens que relacionam a interpretação geométrica dos operadores vetoriais aos fenômenos físicos podem contribuir significativamente para a compreensão dos conteúdos.

Embora não tenha sido objetivo deste trabalho realizar uma avaliação quantitativa da aprendizagem, a participação dos estudantes, as discussões promovidas em sala e o interesse demonstrado ao longo da atividade indicaram que a proposta apresenta potencial como ferramenta complementar de apoio ao ensino da disciplina.

Por fim, espera-se que o material desenvolvido possa servir como recurso auxiliar para estudantes de Engenharia Elétrica, contribuindo para uma aprendizagem mais sólida dos fundamentos do eletromagnetismo e auxiliando na construção das competências necessárias para disciplinas posteriores e para a atuação profissional na área.

REFERÊNCIAS

- Eletromagnetismo UFF. *Canal Eletromagnetismo UFF*. 2026. <<https://www.youtube.com/@eletromagnetismouff1168>>. Acesso em: 30 jun. 2026. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 72.
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison-Wesley, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 72.
- GUIMARÃES, G. C. *Apostila de conceitos teóricos e exercícios propostos*. Uberlândia, 2010. Material didático. Citado na página 22.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. Citado na página 19.
- STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2. ISBN 978-85-221-1463-4. Citado na página 22.
- Universidade Federal de Minas Gerais. *Relatório de Avaliação do Curso de Engenharia Elétrica – Bacharelado*. 2021. Documento institucional do Programa de Avaliação dos Cursos de Graduação. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- Universidade Federal de Santa Maria. *Relatório de Autoavaliação do Curso de Engenharia Elétrica*. 2022. Documento institucional de avaliação do curso. Citado na página 18.